Zusammenfassung der Vorlesung

Moodle

1 statische Spiele unter vollständiger Information

- simultane Spiele in Normalform
- strikte und schwache Dominiertheit von Strategien
- iterative Elimination
- Nash Gleichgewichte (in reinen und gemischten Strategien)

Anwendungen:

- Gefangenen Dilemma
- Cournot, Bertrand
- private Bereitstellung öffentlicher Güter

Spiel in Normalform

$$\{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$$

- Spieler:innen $i = 1, \ldots, n$
- S_i Menge der reinen Strategien von $i \rightarrow s_i \in S_i$ reine Strategie

  $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ Menge der Profile von reinen Strategien aller Spieler:innen $\rightarrow \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ ein Profil
- $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion von i $\rightarrow u_i : (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}$

Notation:

- s_{-i} Profil von reinen Strategien ohne s_i von i
- S_{-i} Menge von Profilen aller Spieler:innen ohne i

Erweiterung auf gemischte Strategien

- $\Delta(S_i)$ Menge aller gemischten Strategien (=Wahrscheinlichkeitsverteilungen) aus S_i.
- $\rightarrow \mathbf{p}_i = (p_i(s_{i1}), p_i(s_{i2}), \ldots) \in \Delta(S_i)$ eine gemischte Strategie von i
- $U_i(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} u_i(s_1, \ldots, s_n) \cdot p_1(s_1) \cdot \ldots \cdot p_n(s_n)$ Erwartungsnutzen von i.

Dominierte Strategie

Eine reine Strategie $s_i \in S_i$ ist durch eine gemischte Strategie $p_i \in \Delta(S_i)$ schwach dominiert, falls

$$U_i(s_i, s_{-i}) \leq U_i(p_i, s_{-i})$$

für alle $s_{-i} \in S_{-i}$ und

$$U_i(s_i, s_{-i}) < U_i(p_i, s_{-i})$$

für mindestens eine $s_{-i} \in S_{-i}$.

Eine reine Strategie $s_i \in S_i$ ist durch eine gemischte Strategie $p_i \in \Delta(S_i)$ strikt dominiert, falls

$$U_i(s_i, s_{-i}) < U_i(p_i, s_{-i})$$

für alle $s_{-i} \in S_{-i}$.

Beste Antwort

Eine beste Antwort von Spieler:in i auf das Profil von reinen Strategien $s_{-i} \in S_i$ ist eine reine Strategie s_i^* von i

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

für alle $s_i \in S_i$.

Die beste Antwort maximiert also den Nutzen von i gegeben dem Profil s_{-i} der anderen Spieler:innen.

Die gemischte beste Antwort p_i^* auf ein Profil von gemischten Strategien p_{-i} ist analog definiert:

$$U_i(p_i^*, p_{-i}) \geq U_i(p_i, p_{-i})$$

für alle $p_{-i} \in \bigtimes_{j \neq i} \Delta(S_j)$

Nash Gleichgewicht

Ein Profil von Strategien $\mathbf{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ ist ein Nash Gleichgewicht, falls für alle Spieler:innen i gilt:

p_i^* ist eine beste Antwort auf p_{-i}^*.

Als Ungleichung:

$$U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(p_i, p_{-i}^*) \; \forall \; p_i \in \Delta(S_i)$$

2 dynamische Spiele unter vollständiger Information

- sequenzielle Spiele in Extensivform
- vollkommene und unvollkommene Information ($\rightarrow$ Informationsmengen)
- Strategie: Handlungsanweisung in jeder Informationsmenge eines Spiels (egal, ob auf Gleichgewichtspfad oder nicht)
- teilspielperfektes Nash Gleichgewicht (im Fall vollkommener Information: bestimmbar durch Rückwärtsinduktion)
- endlich und unendlich oft wiederholte Spiele
- Triggerstrategie
- Folk-Theorem

2 dynamische Spiele unter vollständiger Information

Anwendungen:

- Stackelberg
- Löhne und Arbeitsnachfrage
- Rubinstein-Verhandlungsspiel
- Bank Runs
- Zölle und Wettbewerb
- Cournot
- Bertrand
- Gefangenen Dilemma
- Effizienzlöhne

Spielbaumdarstellung

- **Entscheidungsknoten**
  Wurzel: Das Spiel beginnt hier
  Jeder Entscheidungsknoten ist genau einer/m Spieler:in zugeordnet
- **Äste**
  Jeder Entscheidungsknoten hat für jede Aktion, die ausgewählt werden kann einen Ast.
  Es führt genau ein Ast zu jedem Entscheidungsknoten (mit Ausnahme der Wurzel).
- **Endknoten**
  Ein Endknoten hat keine Äste.
  Einem Endknoten sind Auszahlungsprofile zugeordnet.
- **Informationsmengen**
  Entscheidungsknoten einer/s Spieler:in, welche diese:r nicht unterscheiden kann, sind in einer Informationsmenge (Darstellung: gestrichelte Linie).

Rückwärtsinduktion

Lösungskonzept für endliche Spiele vollkommener Information (keine gestrichelten Linien)

- Beginne mit einem letzten Entscheidungsknoten.
- Markiere Ast einer Aktion, welche für den/die dort entscheidende:n Spieler:in am besten ist.
- Ersetze den Entscheidungsknoten durch einen Endknoten mit dem Auszahlungsprofil des markierten Astes.
- Wiederhole dieses Vorgehen, bis die Wurzel erreicht ist.

Ausgehend von der Wurzel gibt es eine Sequenz von markierten Aktionen bis zu einem Endknoten des ursprünglichen Spiels. Diese Sequenz heißt Rückwärtsinduktionsergebnis (RIE).

Eine reine Strategie für Spieler:in i benennt eine Aktion für jeden Entscheidungsknoten bei welchem i dran ist.

Teilspiel

- Ein Teilspiel eines dynamischen Spiels beginnt in einem Entscheidungsknoten des ursprünglichen Spiels.
- Dieses Teilspiel darf nur durch den Ast, der zu diesem Entscheidungsknoten führt, mit dem ursprünglichen Spielbaum verbunden sein.
- Das ursprüngliche Spiel ist ebenfalls ein Teilspiel (von sich selbst).

Eine reine Strategie für Spieler:in i benennt eine Aktion für jedes Teilspiel in welchem i dran ist.

Teilspielperfektes Nash Gleichgewicht

Lösungskonzept für endliche Spiele vollkommener und unvollkommener Information

- Beginne mit einem letzten Teilspiel.
- Suche ein Nash Gleichgewicht dieses Teilspiels.
- Ersetze die Wurzel des Teilspiels durch einen Endknoten mit dem Auszahlungsprofil des Nash Gleichgewichts.
- Wiederhole dieses Vorgehen bis das letzte Teilspiel gelöst wurde.

Ein teilspielperfektes Nash Gleichgewicht ist ein Profil von Strategien, bei welchem in jedem Teilspiel ein Nash Gleichgewicht gespielt wird.

3 statische Spiele unter unvollständiger Information

- Bayesianisches Nash Gleichgewicht (BNGG)
- Revelationsprinzip
- Erlösäquivalenztheorem

Anwendungen:

- gemischte NGGs als reine BNGG
- Auktionen
- Double Auction

Typen

- Die Natur wählt zufällig ein Profil von Typen
- Jede:r Spieler:in beobachtet seinen/ihren eigenen Typ, nicht aber den der anderen.
- Die Typen können unabhängig oder korreliert sein.
- Die Spieler:innen kennen die („A priori“-)Wahrscheinlichkeiten der Natur.
- Beliefs: bedingte Wahrscheinlichkeit der anderen Typen gegeben des eigenen Typen.
- Die Typen können Auszahlungsrelevant sein.

Statisches Bayesianisches Spiel

$$\{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n\}$$

- A_i: Aktionenmenge von i ($A = \times_{i=1}^n A_i$: Menge aller Aktionen)
- T_i: Typenmenge von i ($T = \times_{i=1}^n T_i$: Menge aller Typen)
- p_i: Belief von i
- $u_i : A \times T \to \mathbb{R}$ Auszahlungsfunktion von i

Strategien, Erwartungsnutzen und BNGG

- Eine Strategie s_i von i ordnet jedem Typen $t_i \in T_i$ von i eine Aktion $a_i \in A_i$ zu.
- $s_i : T_i \to A_i$
- Gegeben einem Typen $t_i \in T_i$, einem Belief $p_i(t_i) : T_{-i} \to \Delta(T_{-i})$ und einer Strategie s_i von i und einem Profil von Strategien s_{-i} erwartet i die Auszahlung

$$U_i(s_i(t_i), s_{-i}|t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}); t_1, \ldots, t_n) \cdot p_i(t_{-i}, t_i)$$

- Ein Profil von Strategien $\mathbf{s}^*$ erfüllt für jede:n Spieler:in i und für jeden Typen $t_i \in T_i$ von i

$$U_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*|t_i) \geq U_i(a_i, s_{-i}^*|t_i) \; \forall \; a_i \in A_i$$

4 dynamische Spiele unter unvollständiger Information

In 2024 nicht behandelt!

- perfektes Bayesianisches Gleichgewicht
- Signalisierungsspiele
  (Pooling und Separating Gleichgewichte)

Anwendungen:

- Poker
- Bier-Quiche-Spiel
- Signalisierung auf dem Arbeitsmarkt
- Wiederholte Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

Struktur der Modulabschlussprüfung

- Klausur (Dauer: 90 Minuten)
- Zu jedem Kapitel 1 bis 3 eine Aufgabe
- Jede Aufgabe besteht aus fünf Teilaufgaben
- Jede Teilaufgabe: maximal sechs Punkte
- Jede Aufgabe: maximal 30 Punkte