

Notizen zu Übung 1 Spieltheorie

Aufgabe 1

A (l, l) $\rightsquigarrow$ (1 Monat, 1 Monat)

B (l, g) $\rightsquigarrow$ (9 Mon., 0 Mon.)

C (g, l) $\rightsquigarrow$ (0 Mon., 9 Mon.)

D (g, g) $\rightsquigarrow$ (6 Mon., 6 Mon.)

rationale Präferenzordnung $\succeq$

- vollständig

Wir können jede beliebige zwei Zustände miteinander vergleichen: z.B. $A \succeq B$
oder $B \succeq A$

• transitiv: es gibt keine "Zirkel"

$$A \succ B, B \succ C \Rightarrow A \succ C$$

zum Beispiel

a) b) $3 > 2 > 1 > 0 \leftarrow \text{ordinale Nutzen}$

$A > D > C > B$ (für beide Gefangenen)
(asymmetrische $\succ$ wären auch möglich)

b)

(2)
gest. leug.

Aktion von 1
 $U_1(\text{gest}, \text{leug})$ Aktion von 2

* gest.

(1)

leug.

D D <u>2</u>, <u>2</u>	C B 1, 0
B C 0, 1	A A <u>3</u>, <u>3</u>

Aktion von 1
 $U_2(\text{gest}, \text{leug})$ Aktion von 2

**
 $U_1(A)$ $U_2(A)$

d)

c) Es gibt keine dominierte Strategie.

Begründung:

*

Falls (2) gestehen wählt,
dann ist für (1) gestehen
besser als leugnen.

$$U_1(\text{gest. gest}) = 2$$

$$U_1(\text{leug. gest}) = 0$$

**

Falls (2) leugnet, dann ist
für (1) leugnen besser:

$$U_1(\text{gest, leug.}) = 1$$

$$U_1(\text{leug, leug.}) = 3$$

Die optimale Entscheidung von (1) hängt von der Entsch. von (2) ab.

d) Die rationalen Spieler:innen entscheiden sich entweder beide für gestehen oder beide für leugnen.

In beiden Fällen wäre ein einseitiges Abweichen nicht lohnenswert.

Falls ein kollektives Abweichen zugelassen wird, dann entscheiden sich beide für leugnen.

Aufgabe 2

a) Esther erkennt, dass die Präf. Ordnung von Miles nicht transitiv ist, und dass deswegen Miles keine Entscheidung treffen kann.

Miles: (korrigiert)

b) Linsen Dal $\succ$ Lauch Quiche $\succ$ Lasagne $\succ$ kalte Küche

3 2 1 0

c) Esther:

Lauch Quiche $\succ$ Linsen Dal $\succ$ Lasagne $\succ$ kalte Küche

3 2 1 0

e) Miles 3
kalte Küche $\succ$ Lasagne $\succ$ Lauch Quiche $\succ$ Linsen Dal

2 1 0

Esther

d)

Falls nur
einseitige
Abweichungen
erlaubt sind,
einigen sich
E. & M.
auf eines
der drei
Gerichte

e)

C

Lauch Qu.

Linzen Dal

Lasagne

Lauch Qu.

2 , 3
1

0 , 0
3

0 , 0
3

Miles

Linzen Dal

0 , 0
3

3 , 2
0

0 , 0
3

Lasagne

0 , 0
3

0 , 0
3

1 , 1
2

Es kommt zu keiner Einigung, da immer mindestens
eine Person abweichen möchte.

Aufgabe 3

		Spielerin 2	
		links	rechts
Spielerin 1	oben	a, b	c, d
	unten	e, f	g, h

oben ist strikt dominant für Sp. 1, falls

$$\underbrace{U_1(\text{oben}, \text{links})}_a > \underbrace{U_1(\text{unten}, \text{links})}_e$$

$$\underbrace{U_1(\text{oben}, \text{rechts})}_c > \underbrace{U_1(\text{unten}, \text{rechts})}_g$$

a)

$$\Rightarrow a > e, c > g$$

$$b > d, f > h$$

links ist strikt dominant für Sp. 2, falls

$$b > d \quad f > h$$

b) oben links ist NBG

falls oben beste Antwort auf links und links beste Antwort auf oben ist.

$$a \geq e$$

$$b \geq d$$

Aufgabe 4

$$u_i(s_1, s_2, s_3, s_4) = 4\sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} - s_i$$

a) beste Antwort von $s_p 1$ auf s_2, s_3, s_4

$$\max_{s_1 \geq 0} 4\sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} - s_1$$

Falls es ein inneres Optimum $s_1^* > 0$ gibt
dann erfüllt es die Bed. 1. Ordnung BEO

$$\cancel{24} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{s_1 + \dots + s_4}} = 1 \quad | \cdot \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{s_1 + \dots + s_4} \quad | ()^2 \Rightarrow$$

$$4 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

Falls $S_1^* > 0 \Rightarrow 4 = S_1^* + S_2 + S_3 + S_4$

Falls $S_2 + S_3 + S_4 \geq 4 \Rightarrow$ es gibt kein $S_1^* > 0$

$\Rightarrow S_1^* = 0$ ist optimal

beste Antwort von SP_1 auf s_2, s_3, s_4

$$S_1^*(s_2, s_3, s_4) = \begin{cases} 4 - s_2 - s_3 - s_4 & \text{falls } s_2 + s_3 + s_4 < 4 \\ 0 & \text{falls } s_2 + s_3 + s_4 \geq 4 \end{cases}$$

S_1 : Menge der reinen Strategien von SP_1 (hier: $S_1 = \mathbb{R}_+$)

$s_1 \in S_1$: s_1 eine reine Strategie von SP_1

b) Nash Gleichgewichte

$(s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*)$ erfüllt

$$s_i^* = \begin{cases} 4 - \sum_{j \neq i} s_j^* & , \text{ falls } \sum_{j \neq i} s_j^* < 4 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, \dots, 4$

jedes NKG erfüllt

$$\bullet s_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\bullet s_1^* + s_2^* + s_3^* + s_4^* = 4$$

$(1, 2, 3, 4) \nabla$

da $1+2+3+4=10 \neq 4$

$$(s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n))$$

c)

$$\max_{s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0}$$

$$\sum_{i=1}^4 \left(4 \cdot \sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} - s_i \right)$$

$$\max_{s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0}$$

$$\sum_{i=1}^4 4 \cdot \underbrace{\sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}}_{\sum_{j=1}^4 s_j = y} - \underbrace{\sum_{i=1}^4 s_i}_y$$

$$\max_{y \geq 0} \sum_{i=1}^4 4 \cdot \sqrt{y} - y$$

$$\max_{y \geq 0} 16 \sqrt{y} - y$$

$$\max_{y \geq 0} \quad 16\sqrt{y} - y$$

Falls $y^* > 0$ erfüllt y^* BEO:

$$\cancel{8} / \cancel{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - 1 = 0 \quad | + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{y}} = 1$$

$$| \cdot \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow 8 = \sqrt{y}$$

$$| ()^2$$

$$\Rightarrow 64 = y$$

d) gibt es ein PE N66?

Gleichgewichtsnutzen?

$$N66: s_1^* + s_2^* + s_3^* + s_4^* = 4$$

$$\begin{aligned} U_i(s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*) &= 4 \cdot \sqrt{s_1^* + \dots + s_4^*} - s_i^* \\ &= 4 \cdot \sqrt{4} - s_i^* = \underbrace{8 - s_i^*}_{\leq 8} \geq 4 \end{aligned}$$

Gibt es eine Aufteilung $(s_1^{**}, s_2^{**}, s_3^{**}, s_4^{**})$ mit

$$U_i(s_1^{**}, \dots, s_4^{**}) > 8 \text{ für alle } i?$$

Für ein $(S_1^{**}, \dots, S_4^{**})$ mit

$$S_1^{**} + S_2^{**} + S_3^{**} + S_4^{**} = 64 \quad \text{gilt}$$

$$\begin{aligned} U_i(S_1^{**}, \dots, S_4^{**}) &= 4 \cdot \sqrt{S_1^{**} + \dots + S_4^{**}} - S_i^{**} \\ &= 4 \cdot \sqrt{64} - S_i^{**} \\ &= 4 \cdot 8 - S_i^{**} = \underbrace{32 - S_i^{**}}_{\leq 32} \geq -32 \end{aligned}$$

Vorschlag: $S_i^{**} = 16$

$$\Rightarrow U_i^{**} = 32 - 16 = 16 > 8$$

Kein NGB ist Pareto effizient.

e) Ist jedes $(s_1^{**}, \dots, s_4^{**})$ mit $\sum_{i=1}^4 s_i^{**} = 64$
Pareto effizient?

Angenommen, es gibt ein $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4)$

mit $U_i(\tilde{s}) \geq U_i(s^{**}) \quad i=1, \dots, 4$

$$U_1(\tilde{s}) > U_1(s^{**})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^4 U_i(\tilde{s}) > \sum_{i=1}^4 U_i(s^{**})$$

$\Rightarrow s^{**}$ ist kein (soziales) Optimum $\Downarrow$

$\Rightarrow$ alle s^{**} aus c) sind Pareto effizient.

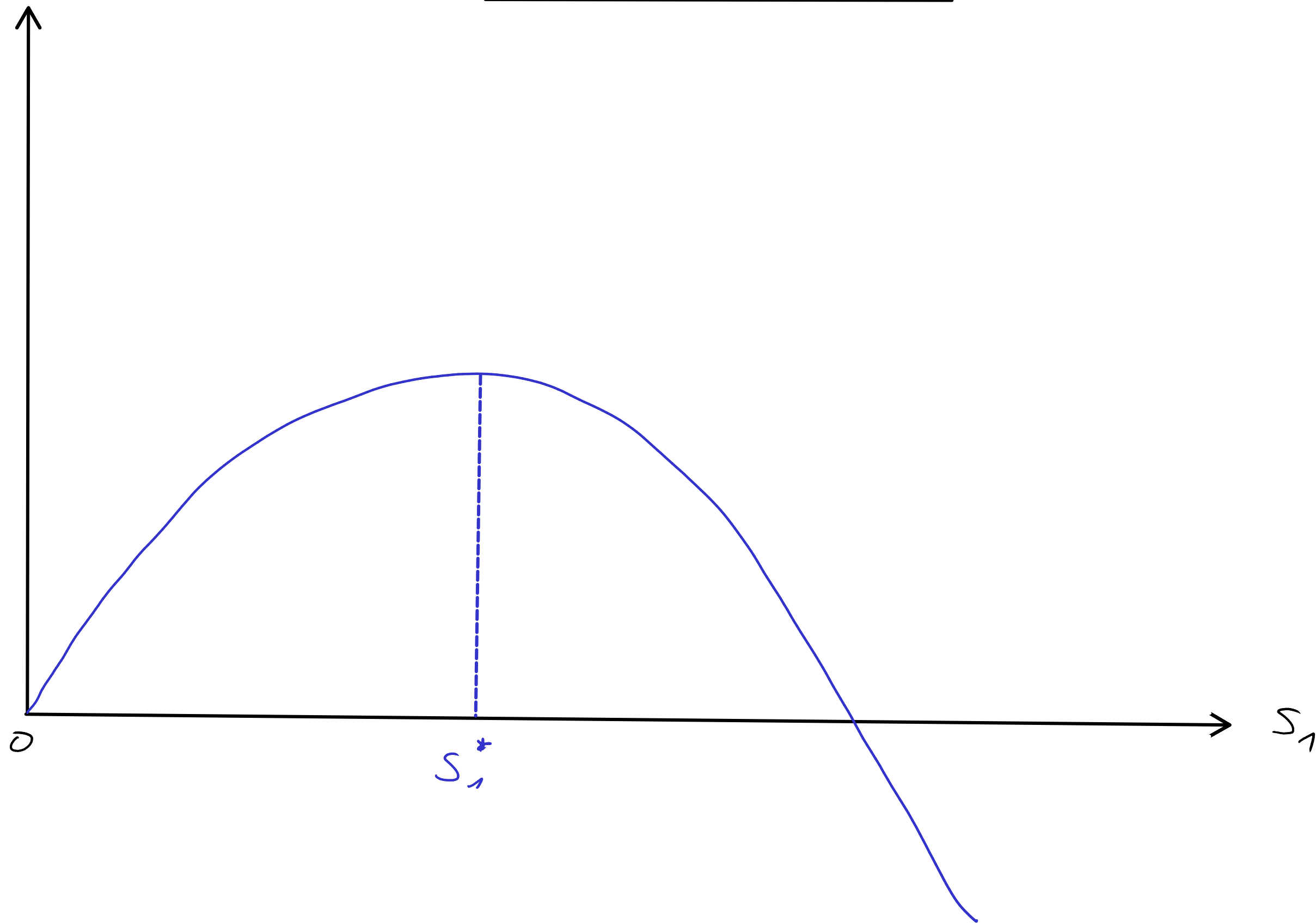
a) Lösung durch Kuhn-Tucker

$$\max_{s_1 \in \mathbb{R}} \quad 4 \sqrt{s_1 + \dots + s_4} - s_1 \quad \text{u.d.B.} \quad s_1 \geq 0$$

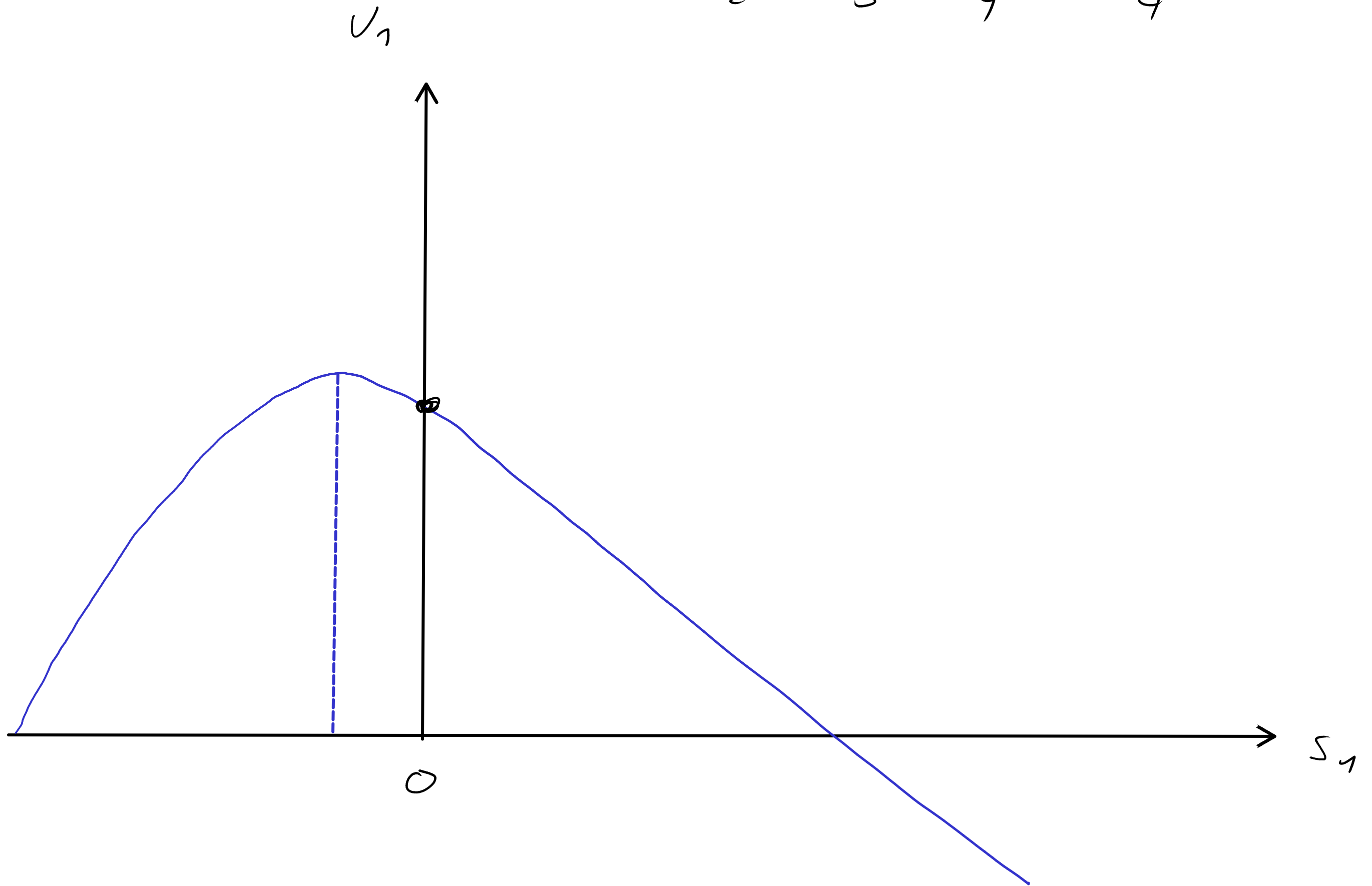
$$\text{BEO} \quad 4 \cdot \frac{1}{2 \sqrt{s_1 + \dots + s_4}} - 1 \leq 0 \quad (\text{falls } s_1^* > 0 : = 0)$$

$U_1(s_1, s_2, s_3, s_4)$

$$\underline{s_2 + s_3 + s_4 < 4}$$



$$S_2 + S_3 + S_4 > 4$$



Aufgabe 5

Spieler: $\{1, 2\}$

Strategien $S_1 = [0, 1]$

$$S_2 = [0, 1]$$

Auszahlungsfunktion

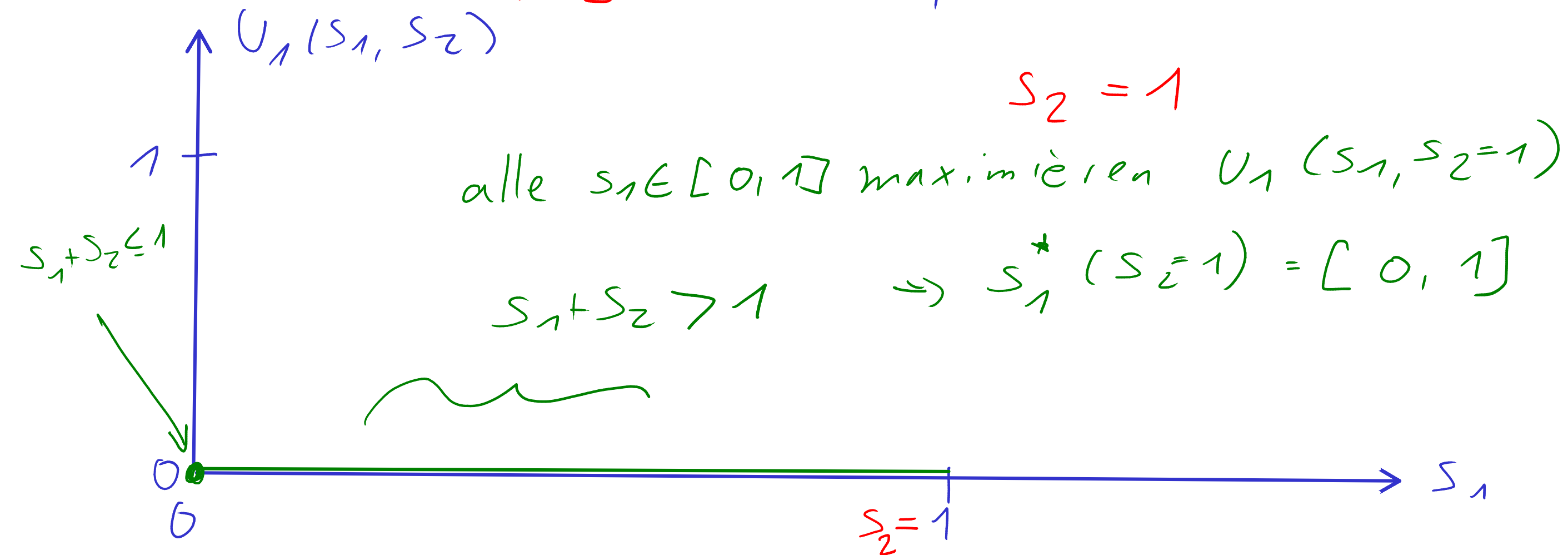
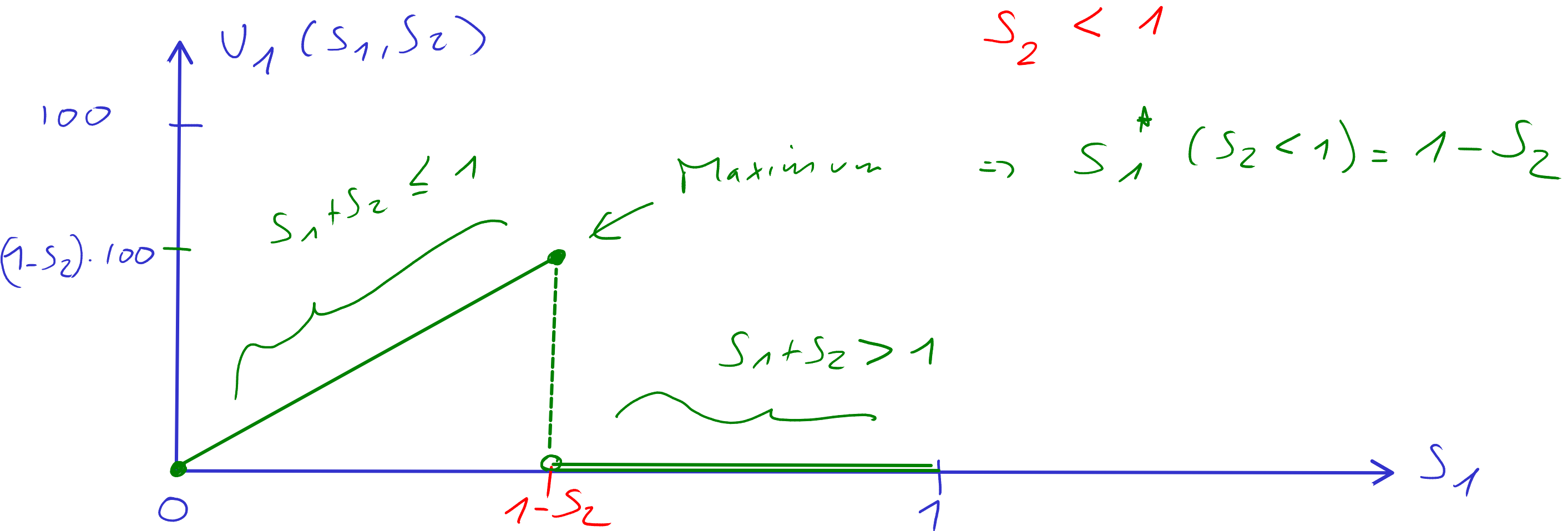
$$U_i(s_1, s_2) = \begin{cases} s_i \cdot 100 \\ 0 \end{cases}$$

$i = 1, 2$

falls $s_1 + s_2 \leq 1$

falls $s_1 + s_2 > 1$

Beste Antworten

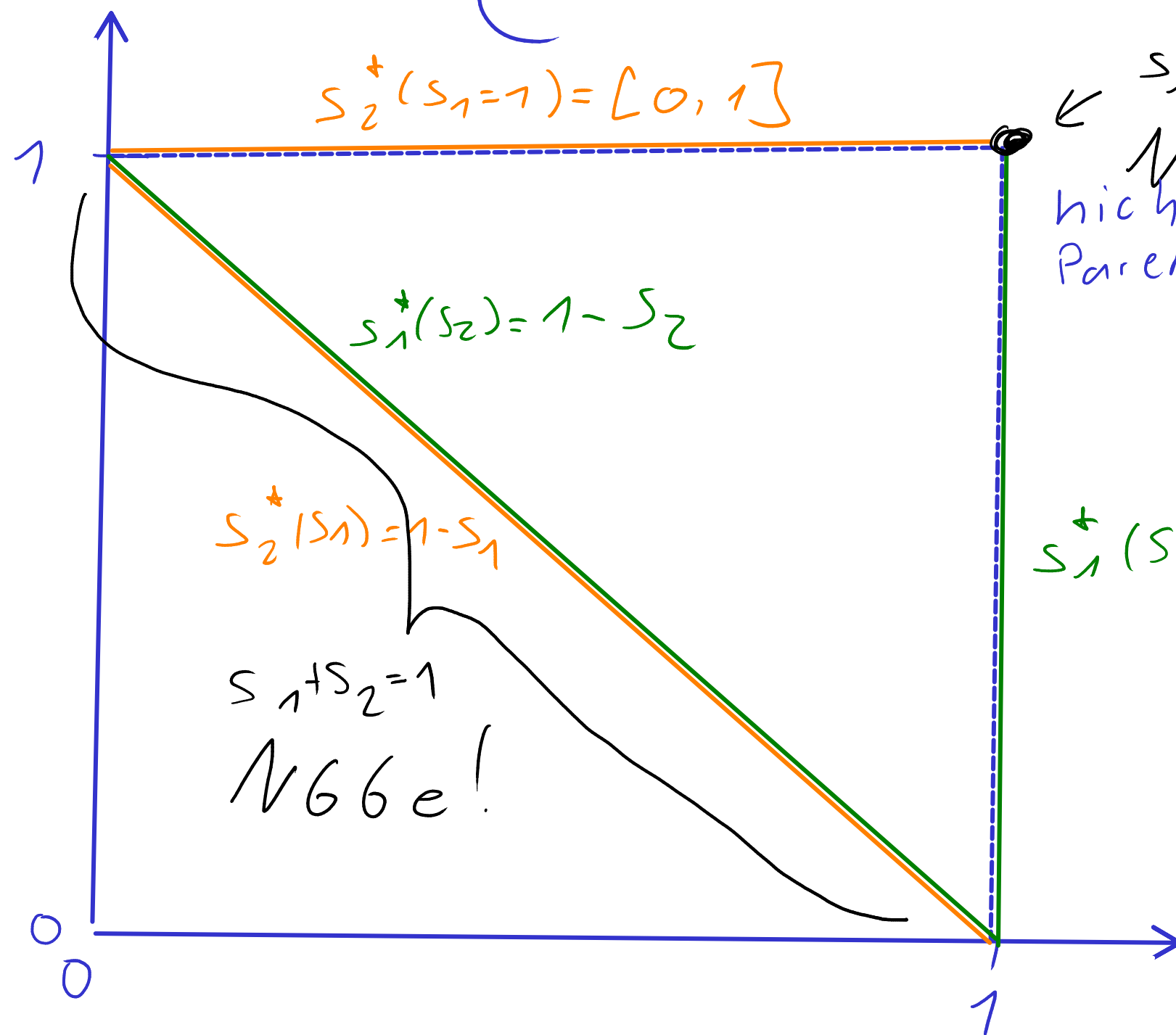


Beste Antwort

$$s_1^*(s_2) =$$

$1 - s_2$, falls $s_2 < 1$

$[0, 1]$, falls $s_2 = 1$



$$s_2^*(s_1=1) = [0, 1]$$

$s_1 = s_2 = 1$
 nicht
 Pareto effizient

$$s_2^*(s_1) = \begin{cases} 1 - s_1 & , s_1 < 1 \\ [0, 1] & , s_1 = 1 \end{cases}$$

$$s_2^*(s_1) = 1 - s_1$$

$s_1 + s_2 = 1$
 N66e!

$$s_1^*(s_2=1) = [0, 1]$$

Nash Gleichgewichte:
 $(s_1^*, s_2^*) = (1, 1)$

$\{ (s_1, s_2) \in [0, 1]^2 \mid s_1 + s_2 = 1 \}$
 Pareto effizient

Dominante / dominierte Strategien?

Keine dominante, da beste Antwort von der Strategie der anderen Person abhängt.

$s_1=1$ ist die einzige beste Antwort auf $s_2=0$

$\Rightarrow s_1=1$ kann nicht dominiert sein.

$s_1=0$ ist eine beste Antwort auf $s_2=1$

$$U_1(s_1=0, s_2=1) = 0 = U_1(s_1 > 0, s_2=1) = U_1(s_1=0, s_2 < 1)$$

$$U_1(s_1=0.5, s_2=0.5) = 0.5 \cdot 100 > 0$$

$s_1=0$ ist schwach dominiert!

Aufgabe 6

2 Gegenbeispiel

a) falsch!

		L	R
1	0	* 1, 1	4, 0
	1	0, 2	* 5, 2

0 nicht strikt dom.

L nur schwach dom.

(0, L) NGG

$\Rightarrow$ 0, L strikt dominante Strategien

~~Wahr~~ oder falsch?

(0, L) NGG, falls

0 beste Antwort auf L : $a \geq c$

L beste Antwort auf 0 : $b \geq d$

b)

o strikt dominant

$a > e$, $c > g$

L strikt dominant

$b > d$, $f > h$

$\left. \begin{array}{l} a > e \\ b > d \end{array} \right\} (0, L) \text{ NGG}$

		2	
		L	r
1	o	a, b	c, d
	v	e, f	g, h

c) kein reines N66

$\Rightarrow$ es ist möglich, dass z.B. o strikt dom.

~~Wahr~~ falsch!

Plan: zu zeigen falls o & s strikt dom.

$\Rightarrow$ es gibt ein reines N66.

o str. dom, falls

$a > e, c > g$

Falls $b > d$	Falls $b = d$	Falls $b < d$
(o, L) N66	(o, L) N66 (o, r)	(o, r) N66

2

	L	r
o	a, b	c, d
v	e, f	g, h

d) höchstens eine str. dom. Strategie?
 wahr ✓

o str. dom.

$a > e$, $c > g$

u str. dom

$a < e$, $c < g$

beides gemeinsam unmöglich

Variante schwach dom.?

o schw. dom.

$(a > e \text{ und } \underline{c > g})$ oder $(\underline{a > e} \text{ und } c > g)$

→ u kann nicht schw. dom. sein

		2	
		L	R
1	o	a, b	c, d
	u	e, f	g, h

e) höchstens ein GGW in
str. dom. Strategien?

Falls es zwei GGW in str. dom. Strat.
gibt, dann gibt es mind. eine Person
mit zwei str. dom. Strategien.

Aus d): dies ist möglich.

f) falsch

(0, L) GGW in str. dom. Strat.

$$a > e, \quad c > g$$

$$b > d, \quad f > h$$

Falls 2 (irrational) auf r abweicht
ist es für 1 trotzdem optimal
bei 0 zu bleiben, da $c > g$

		2	
		L	R
1	0	a, b	c, d
	1	e, f	g, h

g) wahr.

(0,1) NGG

		2	
		L	R
1	0	[*] <u>1</u> , <u>1</u>	4, <u>0</u>
	1	<u>0</u> , 2	[*] <u>5</u> , 2

Falls 2 von L auf R wechselt

dann bekommt 1 bei U Auszahlung 5

anstelle von 4 bei 0 und sollte wechseln!

Aufgabe 7

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	0, <u>100</u>	0, <u>100</u>	0, <u>100</u>	0, <u>100</u>	0, <u>100</u>
s_2	<u>81</u> ,19	20, <u>80</u>	20, <u>80</u>	20, <u>80</u>	20, <u>80</u>
s_3	<u>81</u> ,19	<u>49</u> ,51	* <u>40</u> , <u>60</u>	40, <u>60</u>	40, <u>60</u>
s_4	<u>81</u> ,19	<u>49</u> ,51	25, <u>75</u>	<u>60</u> ,40	60,40
s_5	<u>81</u> ,19	<u>49</u> ,51	25,75	9, <u>91</u>	<u>80</u> ,20
s_6	<u>81</u> ,19	<u>49</u> ,51	25,75	9,91	1, <u>99</u>

a)

Eindeutiges NCG: (s_3, t_3)

b)

1

2

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
s_2	81,19	20,80	20,80	20,80	20,80
s_3	81,19	49,51	* <u>40,60</u>	40, <u>60</u>	40, <u>60</u>
s_4	81,19	49,51	25, <u>75</u>	<u>60</u> ,40	60,40
s_5	81,19	49,51	25,75	9, <u>91</u>	<u>80</u> ,20
s_6	81,19	49,51	25,75	9,91	1,99

2. 4. 5.

Aufgabe 8

Schwach dominierte Strategien?

A

	l	r
o	5,1	4,0
m	6,0	3,1
u	6,4	4,4

2

1.

3.

2.

C

	l	r
o	5,1	4,0
m	6,0	3,1
u	6,4	4,4

3.

1.

2.

B

	l	r
o	5,1	4,0
m	6,0	3,1
u	6,4	4,4

1.

2.

	l	r
o	5, <u>1</u>	<u>4</u> ,0
m	<u>6</u> ,0	3, <u>1</u>
u	* <u>6</u> , <u>4</u>	* <u>4</u> , <u>4</u>

Aufgabe 9 (Cournot Oligopol $n=3$)

$$\pi_1(q_1, q_2, q_3)$$

$$= \begin{cases} (30 - q_1 - (q_2 + q_3)) q_1 & \text{falls } q_1 + q_2 + q_3 \leq 34 \\ -4q_1 & \text{falls } q_1 + q_2 + q_3 > 34 \end{cases}$$

Reaktionsfunktion
= Beste Antwort - Funktion:

$$q_1^*(q_2, q_3) = \begin{cases} 15 - \frac{1}{2}(q_2 + q_3) & \text{falls } q_2 + q_3 \leq 30 \\ 0 & \text{falls } q_2 + q_3 > 30 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} = 30 - 2q_1 - q_2 - q_3$$

Falls $q_1 > 15 \Rightarrow 30 - 2q_1 < 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} < -(q_2 + q_3) \leq 0$$

$q_1 > 15$ ist strikt dominiert durch $q_1 = 15$.

$$q_i \leq 15 \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} = 30 - 2q_1 - q_2 - q_3$$

$$q_2 \leq 15, \quad q_3 \leq 15 \Rightarrow q_2 + q_3 \leq 30$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \geq \underbrace{-2q_1}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow$ keine weiteren strikt dominierten
Strategien für Firma 1.

Aufgabe 10

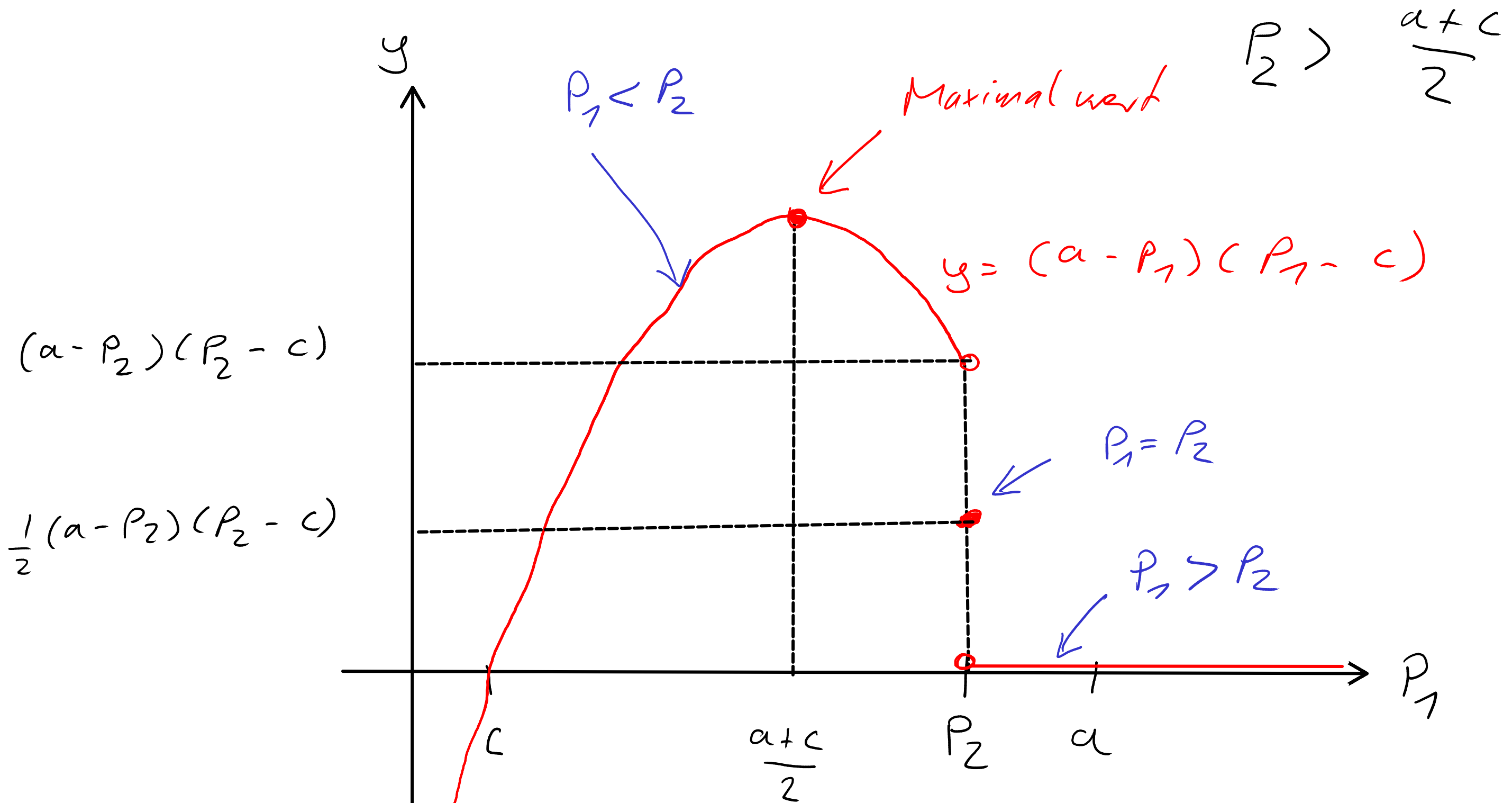
Bestand Duopol

Nachfragefunktion

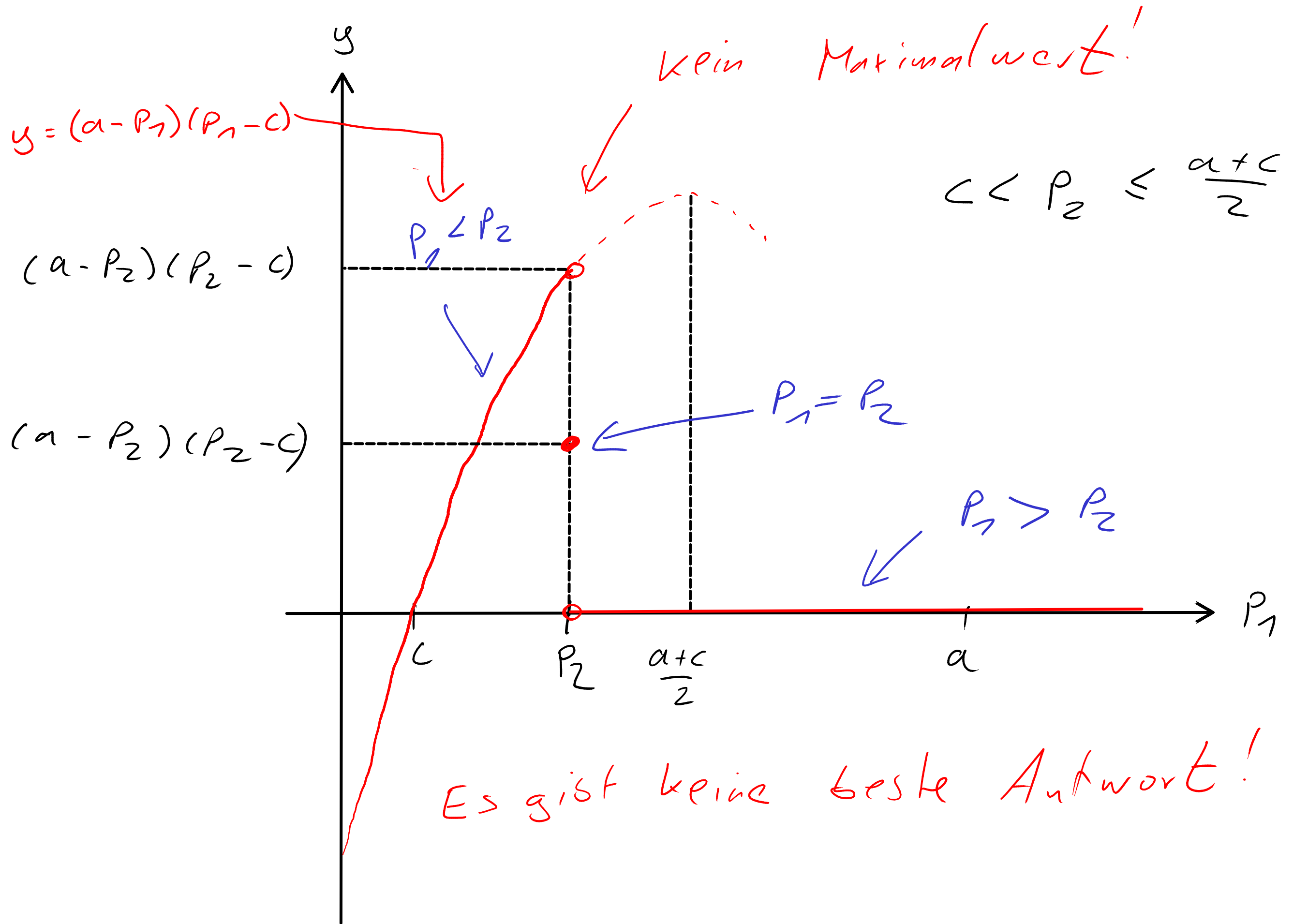
$$D_1(P_1, P_2) = \begin{cases} a - P_1, & \text{falls } P_1 < P_2 \\ \frac{1}{2}(a - P_1), & \text{falls } P_1 = P_2 \\ 0, & \text{falls } P_1 > P_2 \end{cases}$$

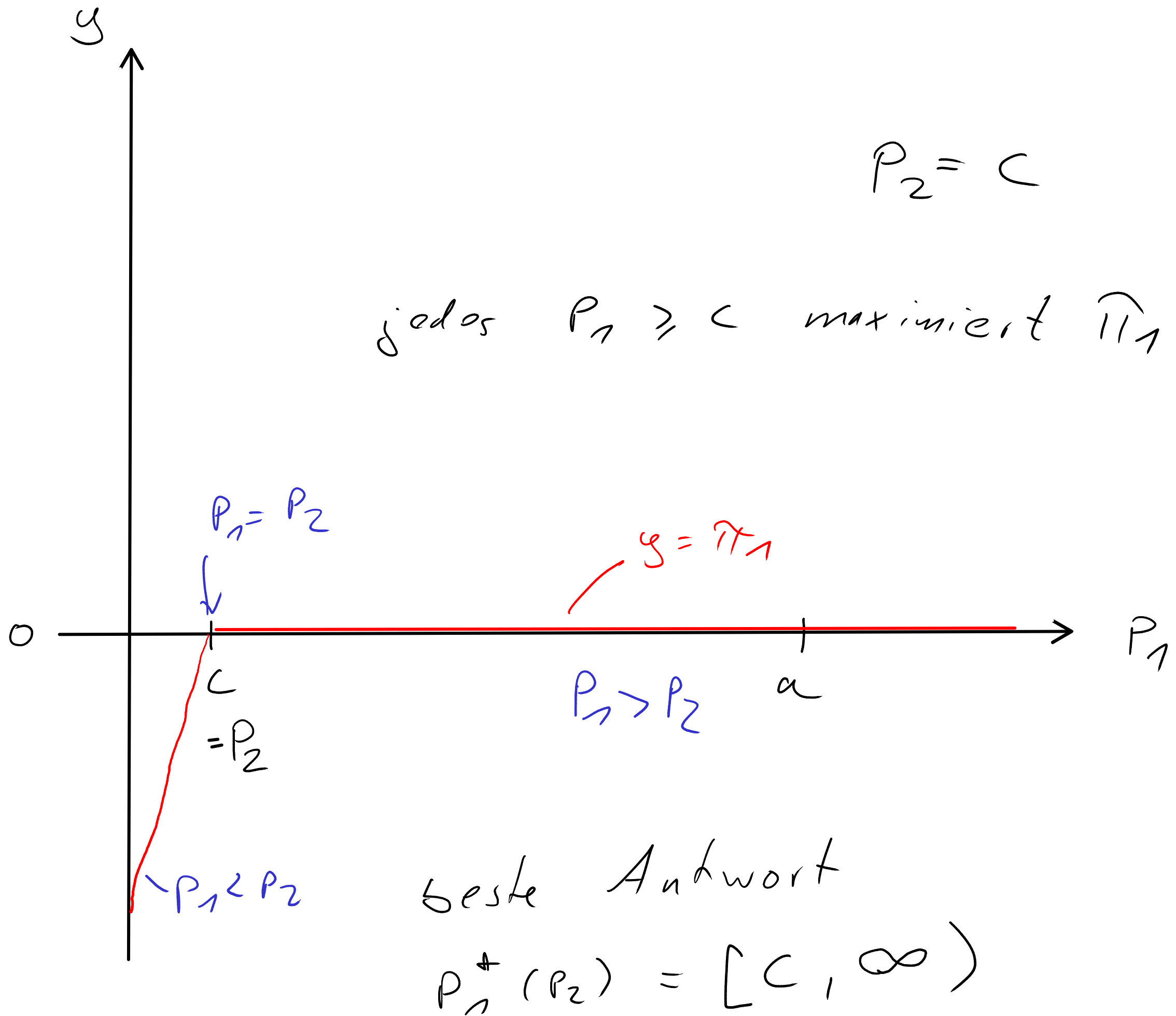
Gewinnfunktion

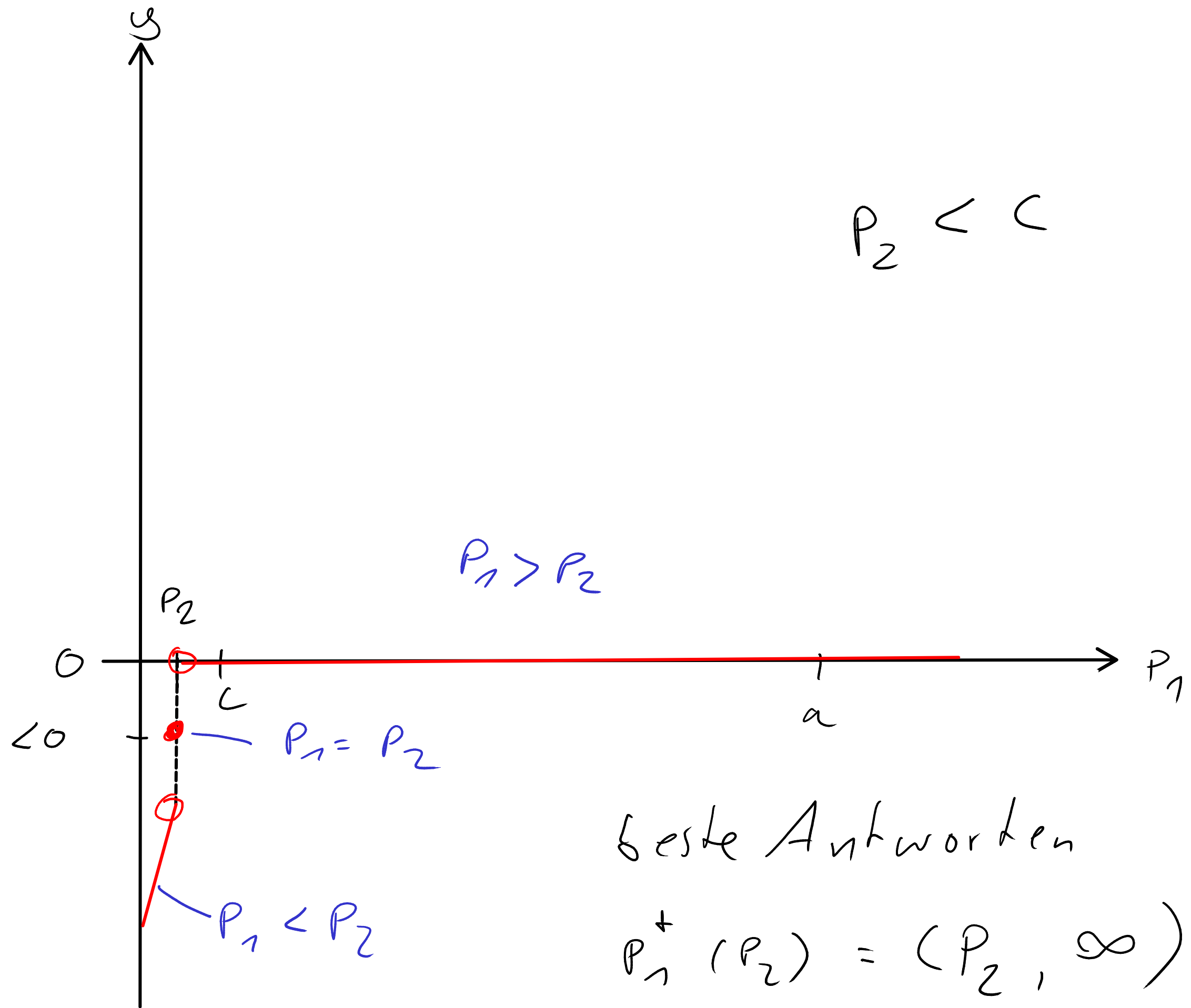
$$\Pi_1(P_1, P_2) = \begin{cases} \overbrace{(a - P_1)}^{\text{Menge}} \cdot \overbrace{P_1}^{\text{Preis}} - \overbrace{C \cdot (a - P_1)}^{\text{Kosten}} & P_1 < P_2 \\ \frac{(a - P_1)(P_1 - C)}{1} & P_1 = P_2 \\ \frac{1}{2}(a - P_1)(P_1 - C) & P_1 > P_2 \end{cases}$$

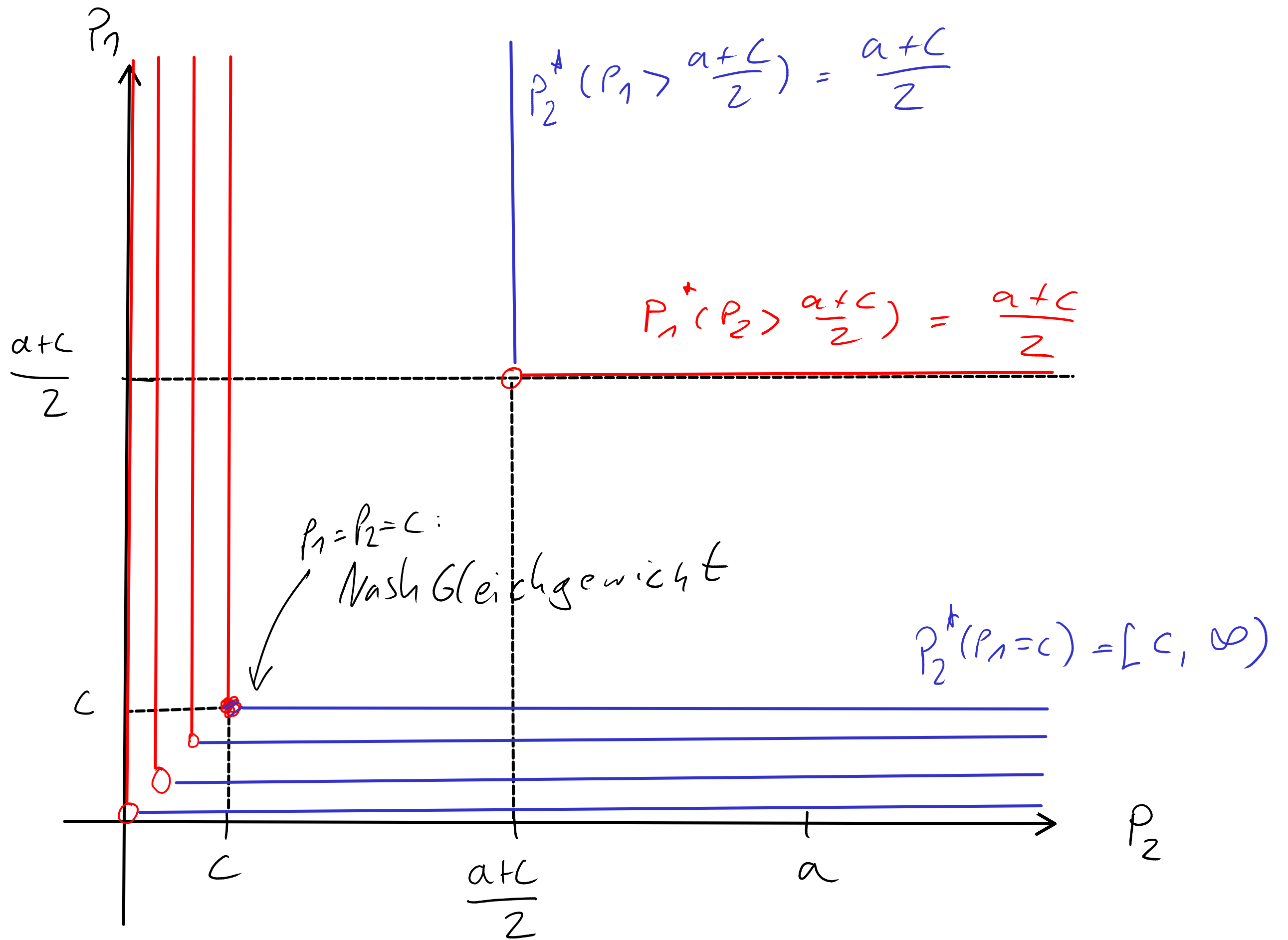


$\Rightarrow$ beste Antwort von F_1 auf $P_2 > \frac{a+c}{2}$
 $P_1^*(P_2) = \frac{a+c}{2}$ (= Monopolpreis)









Aufgabe 11 Wettsreite (contests)

Allgemeine Darstellung

n Spieler

Ressource mit Wert V_i für Sp. i , $i=1, \dots, n$

e_i : "effort" Anstrengung von Sp. i $i=1, \dots, n$
Investition für Wettstreit.

Contest Success Function (CSF)

$\psi_i : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $i=1, \dots, n$ (differenzierbar)

- Wahrscheinlichkeit, dass i gewinnt
- Anteil an der Ressource für i .

Eigenschaften von ψ_i

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial e_i} > 0$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial e_j} < 0 \quad j \neq i$$

$$\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{e_1}{e_1 + e_2} + \frac{e_2}{e_1 + e_2} = \frac{e_1 + e_2}{e_1 + e_2} = 1$$

Beispiel $\psi_i(e_1, e_2) = \frac{e_1}{e_1 + e_2} = e_1 (e_1 + e_2)^{-1}$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial e_1} = \frac{1(e_1 + e_2) - e_1 \cdot 1}{(e_1 + e_2)^2} = \frac{e_2}{(e_1 + e_2)^2} > 0$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial e_2} = e_1 \cdot (-1) (e_1 + e_2)^{-2} = -\frac{e_1}{(e_1 + e_2)^2} < 0$$

Spezialfall: CSF mit Impact Functions

$$\psi_i(e_1, \dots, e_n) = \frac{f(e_i)}{\sum_{j=1}^n f(e_j)} \quad \text{mit } f' \geq 0$$

Weitere Spezialfälle

• Headstart $f(e_i) = f_i(e_i) = e_i + H_i$

• Potenzfunktion $f(e_i) = e_i^r, r \geq 0$

$r=1 \rightarrow$ Standard Tullock Contest

$r=0 \rightarrow \psi_i = \frac{1}{n} \quad i=1, \dots, n$ (reine Lotterie)

$r \rightarrow \infty$

$$\psi_i(e_1, \dots, e_n) = \frac{e_i^r}{\sum_{j=1}^n e_j^r}$$

Für $r \rightarrow \infty$

$$\psi_i(e_1, \dots, e_n) = \begin{cases} 1 & , e_i = \max \{e_1, \dots, e_n\} \\ 0 & , e_i < \max \{e_1, \dots, e_n\} \end{cases}$$

→ Auktion (All pay)

Kosten von $e_i \rightsquigarrow c(e_i)$

meistens: $c(e_i) = e_i$

Anwendung an:

- Sportwettkämpfe
- Pferderennen → Wetten
- relative Bewertungen in Klausuren
- Black Jack? → Anwendungen?
- Öffentliche Ausschreibungen
- Bewerbungen
- Wahlkampf

Für $\psi_i(e_1, e_2) = \frac{e_i}{e_1 + e_2}$ mit $\psi_i(0, 0) = \frac{1}{2}$

$v_1 = 4, \quad v_2 = 2, \quad c(e_i) = e_i \quad e_i > 0$
 $i = 1, 2$

Erwartungsnutzen

$$U_1(e_1, e_2) = \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot 4 - e_1$$

$$U_2(e_1, e_2) = \frac{e_2}{e_1 + e_2} \cdot 2 - e_2$$

a) Bedingungen erster Ordnung

Falls $e_1^* > 0 \Rightarrow BEO \stackrel{!}{=} 0$
 $e_2^* > 0 \quad = \quad \frac{\partial U_2}{\partial e_2} \stackrel{!}{=} 0$

$$U_1(e_1, e_2) = \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot 4 - e_1$$

$$\text{Fall } p_1^*, p_2^* > 0$$

$$U_2(e_1, e_2) = \frac{e_2}{e_1 + e_2} \cdot 2 - e_2$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial e_1} = \frac{e_2}{(e_1 + e_2)^2} \cdot 4 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$BEO_1$$

$$(=) \quad e_2 \cdot 4 = (e_1 + e_2)^2$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial e_2} = \frac{e_1}{(e_1 + e_2)^2} \cdot 2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$BEO_2$$

$$(=) \quad e_1 \cdot 2 = (e_1 + e_2)^2$$

$$e_2 \cdot 4 = (e_1 + e_2)^2$$

BE01

Beste Antwort : Löse nach e_1 auf

$$2 \cdot \sqrt{e_2} = e_1 + e_2 \quad (\Leftrightarrow) \quad e_1 = 2\sqrt{e_2} - e_2$$

Beste Antwort

$$\Rightarrow e_1^*(e_2) = \begin{cases} 2\sqrt{e_2} - e_2 & \text{falls } 0 < e_2 \leq 4 \\ 0 & \text{falls } e_2 > 4 \end{cases}$$

$$e_1 \cdot 2 = (e_1 + e_2)^2$$

BE02

$$\sqrt{2} \sqrt{e_1} = e_1 + e_2 \quad \Rightarrow \quad e_2^*(e_1) = \begin{cases} \sqrt{2} \sqrt{e_1} - e_1 & \text{falls } 0 < e_1 \leq 2 \\ 0 & \text{falls } e_1 > 2 \end{cases}$$

Ein NKG (e_1^*, e_2^*) erfüllt

$$e_1^* = e_1^*(e_2^*), \quad e_2^* = e_2^*(e_1^*)$$

Löse

$$4e_2 = (e_1 + e_2)^2$$

$$2e_1 = (e_1 + e_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4e_2 = 2e_1 \quad (\Leftrightarrow 2e_2 = e_1)$$

$$2e_1 = (e_1 + e_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2e_2 = e_1$$

$$2 \cdot 2e_2 = (2e_2 + e_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2e_2 = e_1$$

$$4e_2 = 9e_2^2$$

$$2e_2 = e_1$$

$$\begin{cases} e_2 = 0 \\ \text{oder} \\ 4 = 9e_2 \\ (e_2 = \frac{4}{9}) \end{cases}$$

Zwei Lösungen
Randlösung
 $(e_1, e_2) = (0, 0)$

innere Lösung
 $(e_1, e_2) = \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$

$$V_1(e_1, e_2) = \begin{cases} \frac{e_1}{e_1 + e_2} \cdot 4 - e_1 & , \text{ falls } e_1 + e_2 > 0 \\ 2 & , \text{ falls } e_1 + e_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_2(e_1, e_2) = \begin{cases} \frac{e_2}{e_1 + e_2} \cdot 2 - e_2 & \text{falls } e_1 + e_2 > 0 \\ 1 & \text{falls } e_1 + e_2 = 0 \end{cases}$$

$$(e_1^*, e_2^*) = \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9} \right) \Rightarrow \psi_1(e_1^*, e_2^*) = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\psi_2(e_1^*, e_2^*) = \frac{1}{3}$$

$$V_1(e_1^*, e_2^*) = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{8}{9} = \frac{8}{3} - \frac{8}{9} = \frac{24}{9} - \frac{8}{9} = \frac{16}{9} < 2$$

$$V_2(e_1^*, e_2^*) = \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{4}{9} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} < 1$$

Ist $(0,0)$ ein N66?

$$U_1(e_1, 0) = \begin{cases} \frac{e_1}{e_1+0} \cdot 4 - e_1 & \text{falls } e_1 + 0 > 0 \\ 2 & \text{falls } e_1 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4 - e_1 & \text{falls } e_1 > 0 \\ 2 & \text{falls } e_1 = 0 \end{cases}$$

Falls $e_2 = 0 \Rightarrow$ existiert keine Beste Antwort von 1

$\Rightarrow$ Also kann $e_1 = e_2 = 0$ kein N66 sein.

Eindeutiges N66 $(e_1^*, e_2^*) = \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}\right)$

$(0,0)$ ist die (Pareto effiziente) Kollisionslösung

Aufgabe 12

x : private Gut

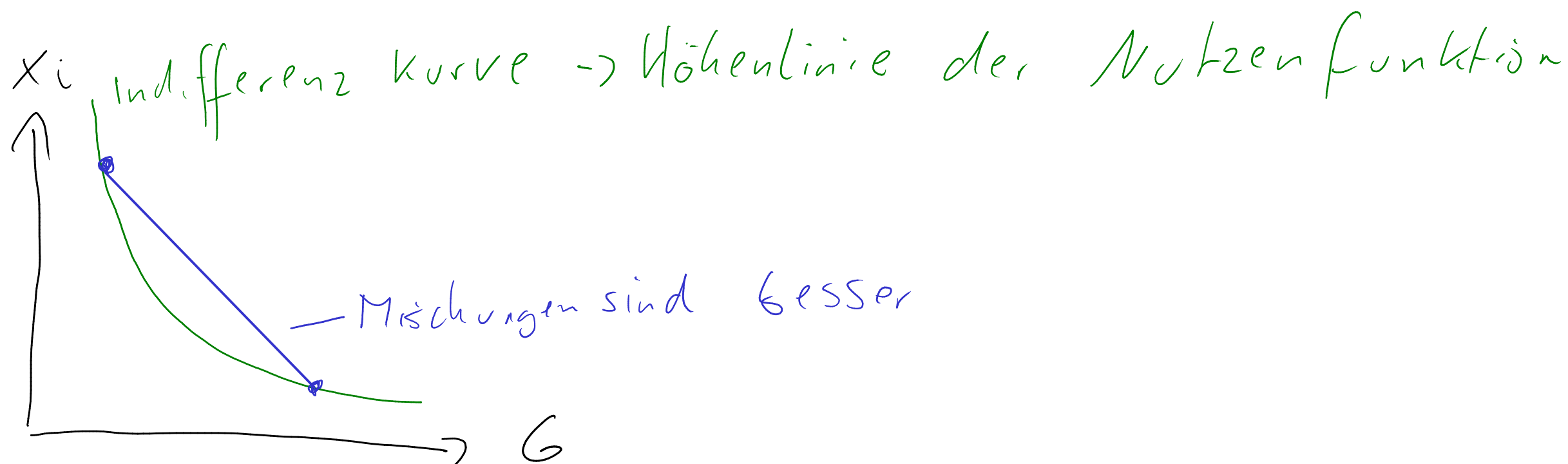
G : öffentliche Gut

$$U_i(x_i, G) = x_i^\gamma \cdot G^\gamma$$

(Cobb Douglas Nutzenfkt.)

→ streng konvexe Präferenzen

Mischungen sind strikt besser



$$\begin{aligned} G &= g_1 + g_2 \\ \uparrow \\ x_2 + g_2 &= m_2 \\ x_2 &= m_2 - g_2 \\ \downarrow \\ x_1 + g_1 &= m_1 \\ x_1 &= m_1 - g_1 \end{aligned}$$

$$U_1(x_1, G) = x_1 \cdot G \quad \text{mit} \quad g_1 + x_1 = m_1$$

$$G = g_1 + g_2$$

$$U_1(g_1, g_2) = \overbrace{(m_1 - g_1)}^{x_1} \overbrace{(g_1 + g_2)}^G \quad \text{mit} \quad 0 \leq g_1 \leq m_1$$

beste Antwort von 1 $\rightarrow g_1^*(g_2)$ auf g_2

$$\max_{0 \leq g_1 \leq m_1} (m_1 - g_1)(g_1 + g_2)$$

Bedingung 1. Ordnung:

$$\text{Falls } 0 < g_1^* < m_1 \Rightarrow \frac{\partial U_1(g_1, g_2)}{\partial g_1} = 0$$

$$\text{Falls } g_1^* = 0 : \frac{\partial U_1(g_1, g_2)}{\partial g_1} \leq 0$$

$$\text{Falls } g_1^* = m_1 : \frac{\partial U_1}{\partial g_1} \geq 0$$

$$U_1(g_1, g_2) = (m_1 - g_1)(g_1 + g_2)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial g_1} = -1 \cdot (g_1 + g_2) + (m_1 - g_1) \cdot 1 = m_1 - g_2 - 2g_1 \stackrel{!}{=} 0$$

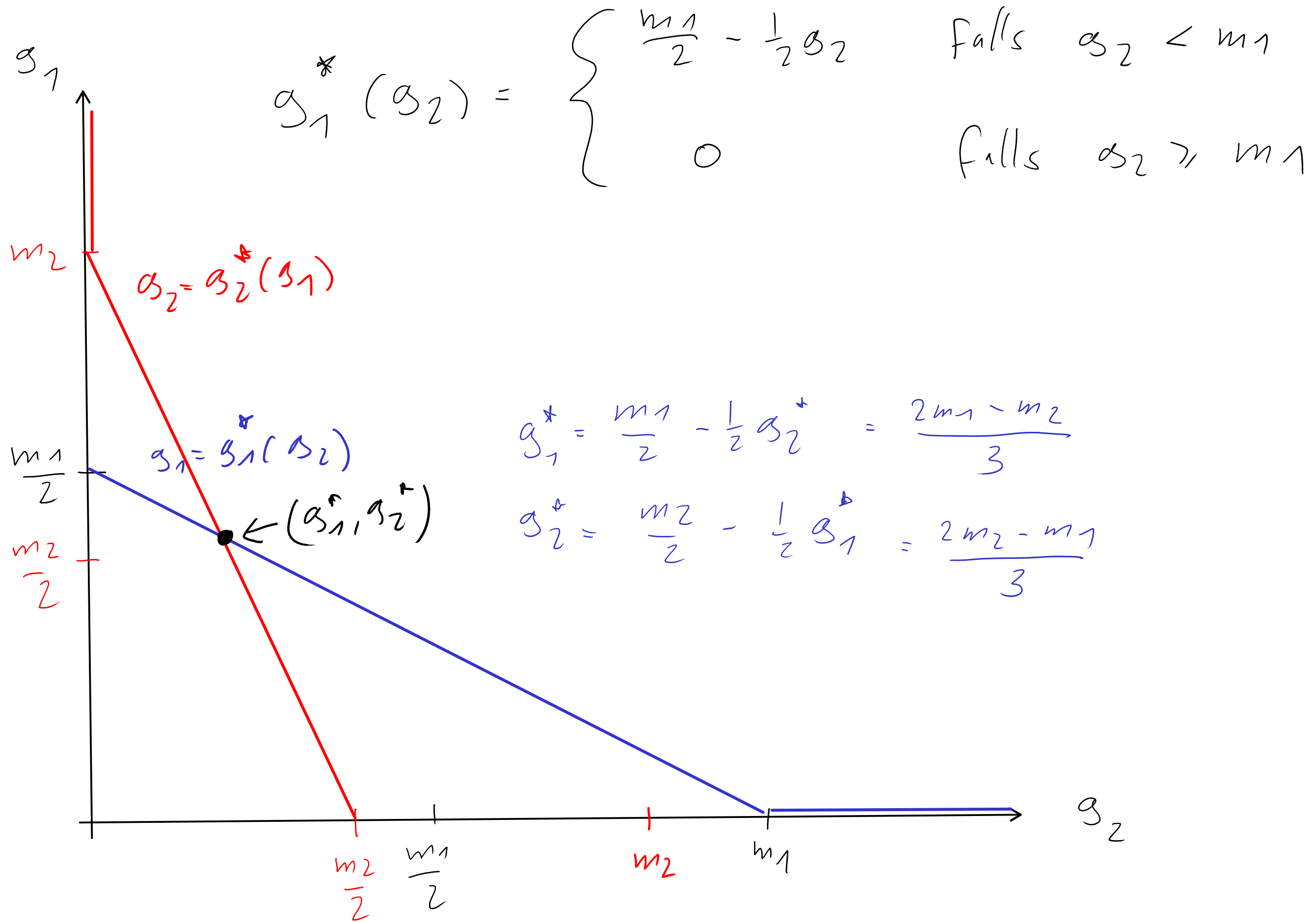
$$\Leftrightarrow m_1 - g_2 = 2g_1 \quad \Leftrightarrow g_1 = \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2$$

$$\text{Falls } 0 < \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2 < m_1, \text{ dann } g_1^* = \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2$$

$$\frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2 > 0 \quad \Leftrightarrow g_2 < m_1$$

$$\frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2 < m_1 \quad \Leftrightarrow -\frac{1}{2}g_2 < \frac{m_1}{2} \quad \Leftrightarrow m_1 + g_2 > 0 \quad \checkmark$$

$$g_1^*(g_2) = \begin{cases} \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2 & \text{falls } g_2 < m_1 \\ 0 & \text{falls } g_2 \geq m_1 \end{cases}$$



falls $\frac{1}{2}m_1 < m_2 < 2m_1$

$$g_1^*(g_2) = \begin{cases} \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2 & \text{falls } g_2 < m_1 \\ 0 & \text{falls } g_2 \geq m_1 \end{cases}$$

$$g_2^*(g_1) = \begin{cases} \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2}g_1 & \text{falls } g_1 < m_2 \\ 0 & \text{falls } g_1 \geq m_2 \end{cases}$$

Vier Fälle:

$$(g_1, g_2) = 0$$

$$g_1 = 0 \Rightarrow g_2 = \frac{m_2}{2} > 0 \quad \Downarrow$$

$$g_1 = 0, g_2 > 0$$

$$g_1 = 0 \Rightarrow g_2 = \frac{m_2}{2} \geq m_1 \Leftrightarrow m_2 \geq 2m_1$$

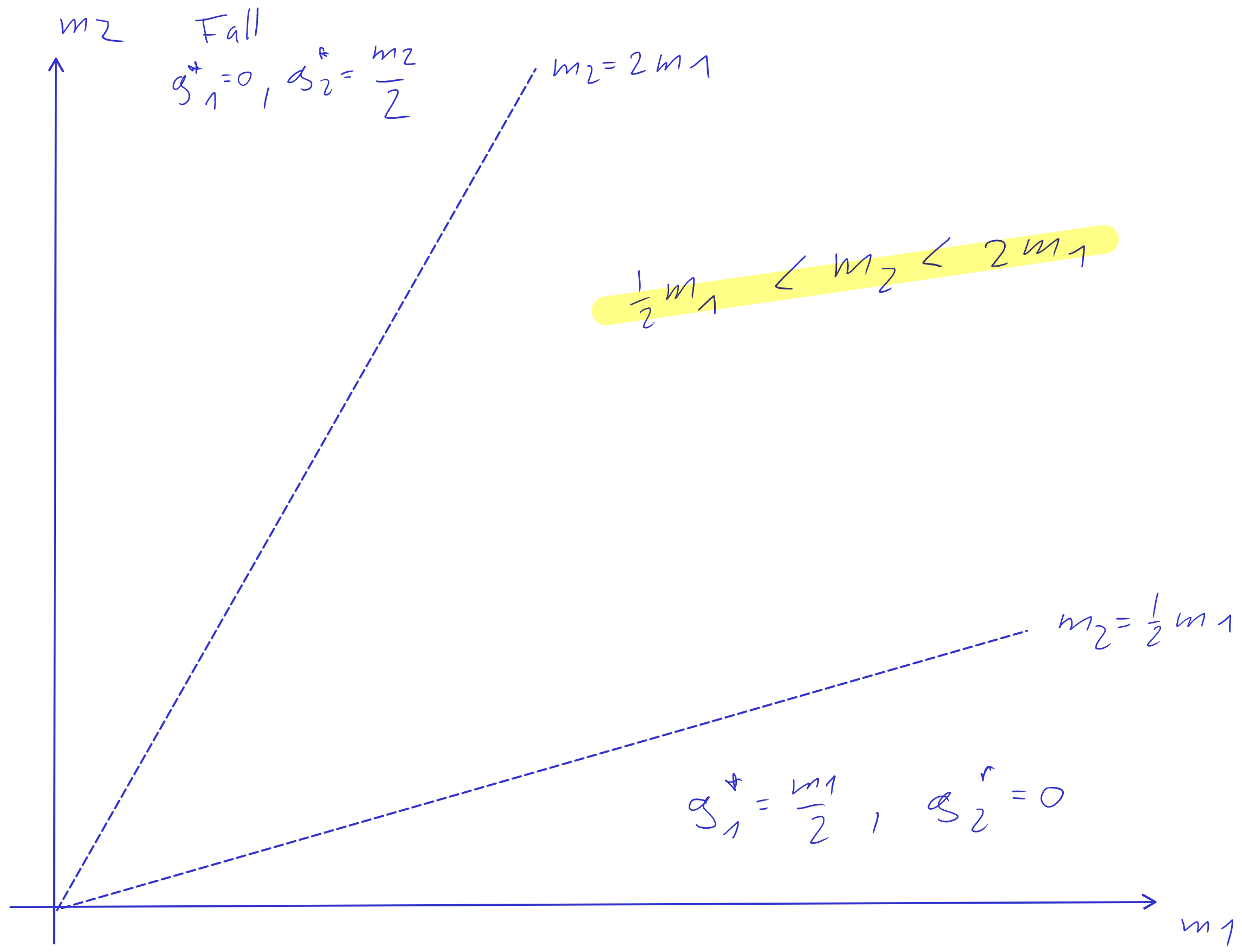
$$g_1 > 0, g_2 = 0$$

$$g_2 = 0 \Rightarrow g_1 = \frac{m_1}{2} \geq m_2$$

$$g_1, g_2 > 0$$

$$g_1^* = \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2}g_2^*$$

$$g_2^* = \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2}g_1^*$$



$$g_1^* = \frac{m_1}{2} - \frac{1}{2} g_2^* \quad 1.2$$

$$g_2^* = \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2} g_1^*$$

$$2g_1^* = m_1 - g_2^*$$

$$g_2^* = \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2} g_1^*$$

$$2g_1^* = m_1 - \frac{m_2}{2} + \frac{1}{2} g_1^* \quad (\Rightarrow) \quad \frac{3}{2} g_1^* = m_1 - \frac{m_2}{2} \quad (\Rightarrow) \quad g_1^* = \frac{2m_1 - m_2}{3}$$

$$g_2^* = \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2} g_1^* = \frac{m_2}{2} - \frac{1}{2} \frac{2m_1 - m_2}{3} = \dots = g_2^* = \frac{2m_2 - m_1}{3}$$

$$g_1^* = \frac{2m_1 - m_2}{3}, \quad g_2^* = \frac{2m_2 - m_1}{3}$$

$$G^* = g_1^* + g_2^* = \frac{2m_1 - m_2 + 2m_2 - m_1}{3} = \frac{m_1 + m_2}{3}$$

$$U_1(g_1, g_2) = (m_1 - g_1)(g_1 + g_2)$$

$$U_1(g_1^*, g_2^*) = \left(m_1 - \frac{2m_1 - m_2}{3}\right) \frac{m_1 + m_2}{3} = \left(\frac{m_1 + m_2}{3}\right) \left(\frac{m_1 + m_2}{3}\right)$$

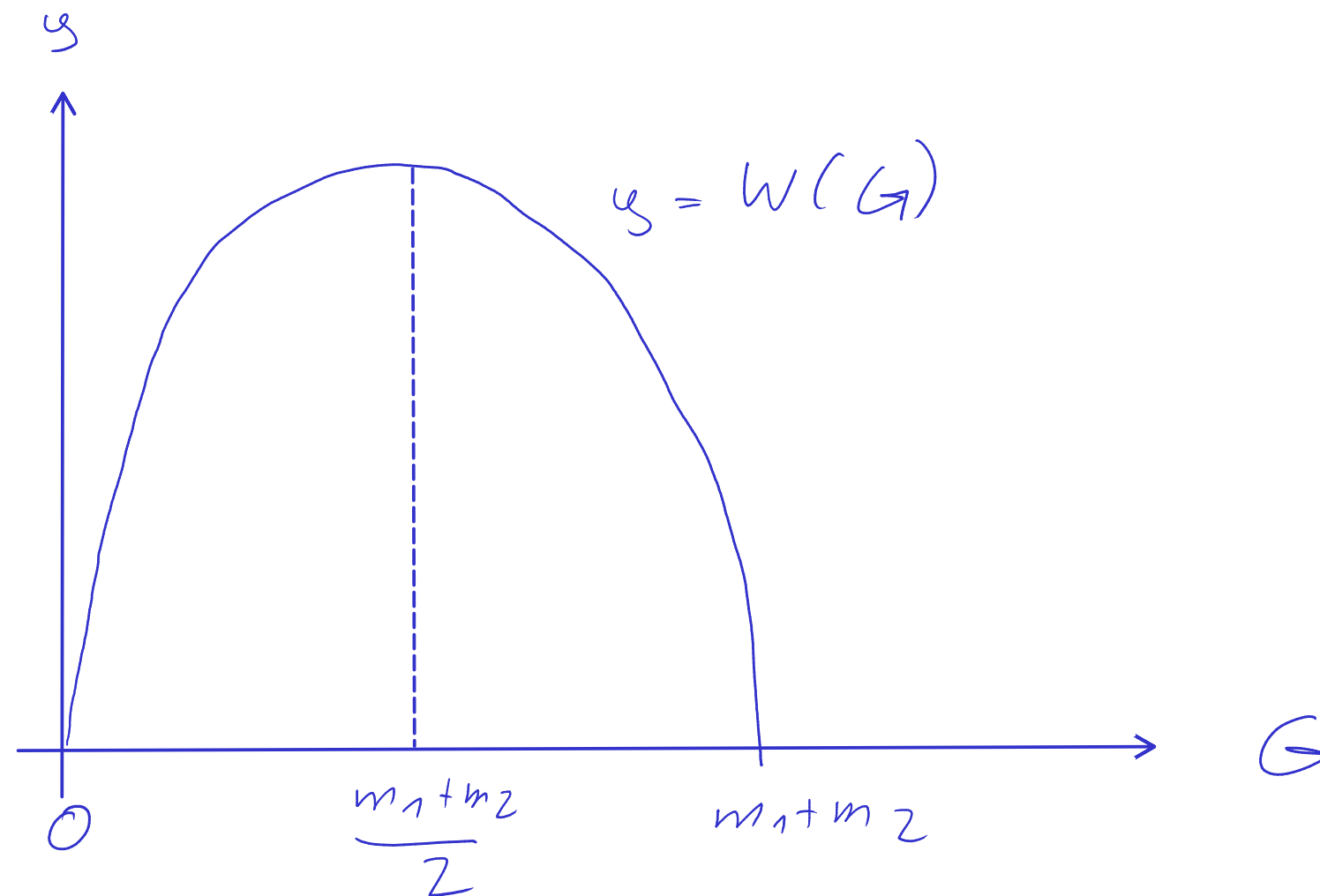
$$= \frac{(m_1 + m_2)^2}{9}$$

$$U_1(g_1, g_2) + U_2(g_1, g_2) = (m_1 - g_1)(g_1 + g_2) + (m_2 - g_2)(g_1 + g_2)$$

$$= (m_1 - g_1 + m_2 - g_2)(g_1 + g_2)$$

$$= (m_1 + m_2 - (g_1 + g_2))(g_1 + g_2)$$

$$= (m_1 + m_2 - G) G = W(G)$$



zum Beispiel: $g_i^{**} = \frac{m_i}{2}$

$$W(G) = (m_1 + m_2 - G) G \quad \text{BEO: } -G + m_1 + m_2 - G = 0$$

$$W''(G) = -2 < 0 \quad \Leftrightarrow G^{**} = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$V_i^{**} = (m_i - g_i^{**})(g_1^{**} + g_2^{**}) = \left(m_i - \frac{m_i}{2}\right) \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{m_i}{2} \frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$V_i^{**} = \frac{m_i}{2} \frac{m_1 + m_2}{2} \quad ? \quad \frac{(m_1 + m_2)^2}{g} = U_i^*$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{m_i}{4} > \frac{m_1 + m_2}{g}$$

$$(\Rightarrow) \quad g m_i > 4 m_1 + 4 m_2$$

$i=1:$

$$g m_1 > 4 m_1 + 4 m_2$$

$$(\Rightarrow) \quad 5 m_1 > 4 m_2 \quad (\Rightarrow) \quad m_2 < \frac{5}{4} m_1$$

$i=2$

$$5 m_2 > 4 m_1 \quad (\Rightarrow) \quad m_2 > \frac{4}{5} m_1$$

$$\text{falls } \frac{1}{2} m_1 < m_2 < 2 m_2$$

$\Rightarrow$ N66 ist nicht effizient

andernfalls

ist N66 effizient