Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund — Fakultät Wirtschaftswissenschaften — 29. Juli 2024

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ______________

Studiengang ______________ Vorname ______________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus drei Aufgaben, jede der Aufgaben besteht aus fünf Teilaufgaben a) bis e), für welche je maximal sechs Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 3 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 3 sind unabhängig voneinander lösbar.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern oder auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten. Ordnen sie ihre Angaben bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1			**Gesamtpunkte Aufgabe 1**		/ 30
Punkte a) / 6	b) / 6	c) / 6	d) / 6	e) / 6	
Aufgabe 2			**Gesamtpunkte Aufgabe 2**		/ 30
Punkte a) / 6	b) / 6	c) / 6	d) / 6	e) / 6	
Aufgabe 3			**Gesamtpunkte Aufgabe 3**		/ 30
Punkte a) / 6	b) / 6	c) / 6	d) / 6	e) / 6	

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1: Statische Spiele unter vollständiger Information

Betrachtet sei das Duopolmodell aus der Vorlesung mit der inversen Nachfragefunktion

$$P(q_1, q_2) = \begin{cases} 34 - q_1 - q_2 & \text{falls } q_1 + q_2 \leq 34 \\ 0 & \text{falls } q_1 + q_2 > 34 \end{cases}$$

und den linearen Kostenfunktionen

$$c_1(q_1) = 4 \cdot q_1 \text{ und } c_2(q_2) = 4 \cdot q_2 \ ,$$

wobei $q_1, q_2 \geq 0$ die Mengen der Firmen 1 und 2 bezeichnen.

a) Geben sie die Gewinnfunktionen der Firmen für Mengen $q_1, q_2 \geq 0$ mit $q_1 + q_2 \leq 34$ an.

Nehmen sie für die Aufgabenteile b) bis e) im Unterschied zur Vorlesung an, dass die Firmen keine beliebigen Mengen wählen können, sondern sich gleichzeitig zwischen den drei Mengen $\{7, 10, 14\}$ entscheiden müssen.

b) Berechnen sie für jedes mögliche Paar von Mengen die Gewinne der beiden Firmen. Stellen sie das Entscheidungsproblem in Form einer Auszahlungsmatrix dar.

c) Bestimmen sie die besten Antworten; benutzen sie hierbei die Notation der Vorlesung und unterstreichen sie die entsprechenden Gewinnzahlen in der Auszahlungsmatrix. Bestimmen sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

d) Wenden sie das Prinzip der iterierten Elimination strikt dominierter Strategien an. Zu welchem Ergebnis kommen sie? Dokumentieren sie die Elimination, in dem sie zu jedem Eliminationsschritt den Spieler und dessen Strategie angegeben, welche eliminiert wird.

e) Nehmen sie an, dass sich die Firmen gegenseitig glaubwürdig versprechen könnten, der jeweils anderen Firma einen zuvor ausgehandelten Geldbetrag $x = 20$ zu bezahlen, falls diese sich für eine zuvor abgesprochene Menge q entscheidet. Könnten sich beide Firmen durch solch eine Absprache ausgehend vom Ergebnis aus b) oder c) verbessern? Stellen sie die entsprechende Absprache konkret dar und begründen sie, warum die Firmen sich an die Absprache halten.

Aufgabe 2 zu Kapitel 2: Dynamische Spiele unter vollständiger Information

Es bezeichne G das folgende Spiel in Normalform:

		Bob L	Bob C	Bob R
Anna	T	112 , 112	91 , 130	63 , 126
Anna	M	130 , 91	100 , 100	60 , 84
Anna	B	126 , 63	84 , 60	28 , 28

a) Bestimmen sie alle Nash Gleichgewichte in reinen und gemischten Strategien des Spiels G.

Nehmen sie für die Aufgabenteile b) bis e) an, dass Bob und Anna dieses Spiel zwei mal spielen, wobei sie das Ergebnis der ersten Stufe beobachten können, bevor sie die zweite Stufe spielen. Das wiederholte Spiel sei mit G^2 bezeichnet. Die Auszahlungen des wiederholten Spiels G^2 entsprechen der jeweiligen Summe der Auszahlungen der einzelnen Stufen.

b) Geben sie eine reine Strategie für Anna an, in welcher sie in der zweiten Stufe nicht immer die gleiche Entscheidung trifft. Wie viele reinen Strategien stehen Anna insgesamt zur Verfügung? Sie können diese Zahl als Potenz angeben.

c) Geben sie ein teilspielperfektes Nash Gleichgewicht von G^2 an und begründen sie, warum es teilspielperfekt ist.

d) Gibt es ein teilspielperfektes Nash Gleichgewicht von G^2, in welchem in mindestens einer der beiden Stufen Anna T und/oder Bob L spielt? Begründen sie ihre Antwort.

e) Gibt es ein Nash Gleichgewicht von G^2 (nicht notwendig teilspielperfekt), in welchem in mindestens einem Entscheidungsknoten von Anna die Strategie von Anna T vorgibt? Falls ihre Antwort „ja“ lautet, geben sie dieses Nash Gleichgewicht an. Andernfalls begründen sie ihre Antwort.

Aufgabe 3 zu Kapitel 3: Statische Spiele unter unvollständiger Information

Bonnie und Clyde spielen gemeinsam ein Spiel, welches an das Gefangenendilemma angelehnt ist. Sie müssen sich simultan zwischen den Alternativen l für „leugnen“ und g für „gestehen“ entscheiden. Ihre Auszahlungen hängen davon ab, ob sie den Typ „egoistisch“ oder den Typ „altruistisch“ haben.

Ein:e egoistische:r Zeilenspieler:in hat folgende Auszahlungen:

	l	g
l	2	0
g	3	1

und ein:e altruistische:r Zeilenspieler:in hat folgende Auszahlungen:

	l	g
l	4	3
g	3	2

Die Natur bestimmt, ob Bonnie und Clyde jeweils egoistisch oder altruistisch sind. Hierbei können folgende drei Zustände je mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten: Beide sind altruistisch oder genau eine der beiden Personen ist altruistisch und die jeweils andere Person egoistisch.

Bevor Bonnie und Clyde sich entscheiden müssen, erfahren sie ihren eigenen Typen, nicht aber den Typen der jeweils anderen Person.

Aufgabenteile a) bis c) fordern sie auf, das obige Spiel als Spielbaum darzustellen. Nutzen sie hierfür eine vollständige Seite! Lesen sie hierzu die Aufgabenteile a) bis c), bevor sie anfangen zu zeichnen.

a) Zeichnen sie zunächst nur die Entscheidungsknoten und die Äste des Spielbaums. Kennzeichnen sie für jeden Entscheidungsknoten, welche:r Spieler:in dran ist und und kennzeichnen sie jeden Ast mit der entsprechenden Aktion.

b) Zeichnen sie nun die Informationsmengen ein, in dem sie die jeweils zugehörigen Entscheidungsknoten mit einer gestrichelten Linie verbinden.

c) Zuletzt zeichnen sie alle Endknoten des Baums ein und ordnen ihnen jeweils das zugehörige Paar von Auszahlungen zu.

d) Markieren sie nun für alle Entscheidungsknoten von Bonnie und Clyde diejenige Aktion, die Bonnie bzw. Clyde auswählt.

e) Geben sie das Bayesianische Nash Gleichgewicht an, wobei sie die Strategien von Bonnie und Clyde vollständig spezifizieren und separat vom Spielbaum angeben.

Lösung zu Aufgabe 1

a)

$$\pi_i(q_i, q_j) = \begin{cases} (34 - q_i - q_j) \cdot q_i - 4 \cdot q_i = (30 - q_i - q_j) \cdot q_i \text{ für } i = 1,2; j = 3 - i & \text{falls } q_1 + q_2 \leq 34 \\ 0 \cdot q_i - 4 \cdot q_i = -4 \cdot q_i & \text{falls } q_1 + q_2 > 34 \end{cases}$$

b), c)

		Firma 2		
		7	10	14
	7	$112\ ,\ 112$	$91\ ,\ \underline{130}$	$\underline{63}\ ,\ 126$
Firma 1	10	$\underline{130}\ ,\ 91$	$\underline{100}\ ,\ \underline{100}$	$60\ ,\ 84$
	14	$126\ ,\ \underline{63}$	$84\ ,\ 60$	$28\ ,\ 28$

Einziges Nash Gleichgewicht: $(q_1^*, q_2^*) = (10, 10)$

d)

Anna streicht $q_1 = 14$. Bob streicht $q_2 = 14$. Anna streicht $q_1 = 7$. Bob streicht $q_2 = 7$. Andere Reihenfolgen sind möglich.

Ergebnis: $q_1 = 10, q_2 = 10$.

e)

Die Firmen versprechen sich gegenseitig glaubwürdig, der jeweils anderen Firma $x = 20$ zu zahlen, falls diese $q = 7$ wählt. Die Auszahlungsmatrix verändert sich dann wie folgt:

		Firma 2		
		7	10	14
	7	$112\ ,\ 112$	$111\ ,\ 110$	$83\ ,\ 106$
Firma 1	10	$110\ ,\ 111$	$100\ ,\ 100$	$60\ ,\ 84$
	14	$106\ ,\ 83$	$84\ ,\ 60$	$28\ ,\ 28$

Die Menge $q = 7$ ist in diesem Spiel strikt dominant, das Paar $(q_1, q_2) = (7, 7)$ ist also ein Nash Gleichgewicht.

Lösung zu Aufgabe 2

a)

		Bob L	Bob C	Bob R
	T	112 , 112	91 , $\underline{130}$	$\underline{63}$, 126
Anna	M	$\underline{130}$, 91	$\underline{100}$, $\underline{100}$	60 , 84
	B	126 , $\underline{63}$	84 , 60	28 , 28

Das einzige Nash Gleichgewicht des Spiels G in reinen Strategien lautet (M, C). Da B durch M und R durch C strikt dominiert und T durch M und L durch C iteriert strikt dominiert werden, gibt es keine Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien.

b) Eine reine Strategie für Anna: „Spiele in der ersten Stufe T und in der zweiten Stufe nur dann T, falls Bob in der ersten Stufe L gespielt hat, ansonsten in der zweiten Stufe M".
In Stufe 1 können neun unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden. In Stufe 2 können die beiden Spieler:innen ihre Entscheidungen also auf diese neun Ergebnisse aus Stufe 1 konditionieren. Also gibt es mit der ersten Stufe zehn verschiedene Entscheidungsknoten mit je drei Alternativen. Demnach hat jede:r der Spieler:innen $3^{10} = 59.049$ verschiedene Strategien.

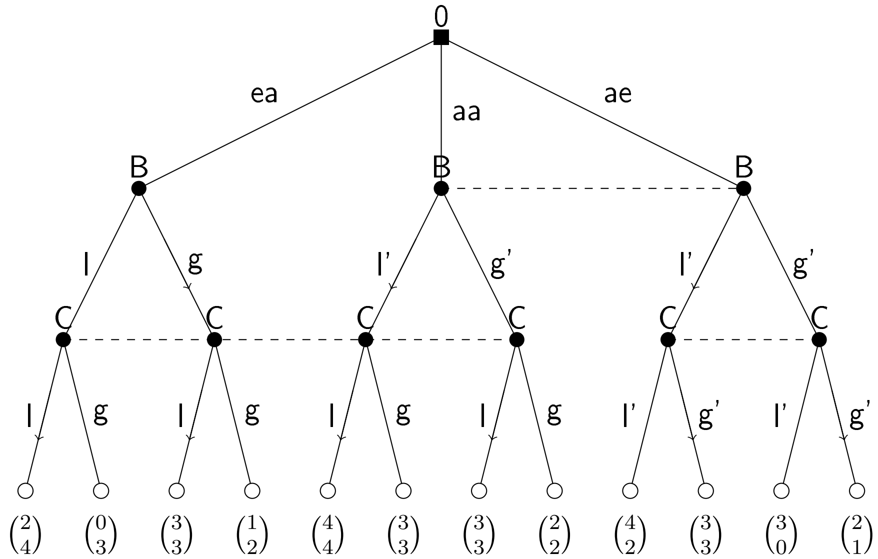
c) Das Stufenspiel G besitzt nur ein Nash Gleichgewicht, nämlich (M, C). Da es nur endlich viele Wiederholungen von G gibt, muss in einem tsp NGG in jedem Teilspiel dieses einzige NGG von G gespielt werden. Daher lautet das einzige tsp NGG des Spiels G^2: $(MMMMMMMMMM, CCCCCCCCCC)$.

d) Nein, $(MMMMMMMMMM, CCCCCCCCCC)$ ist das einzige tsp NGG des Spiels G^2.

e) Anna hat die Strategie $MTMMMTMMTMM$, welche lautet: „Spiele in Stufe 1 M und in Stufe 2 ebenfalls M, wenn Bob in der 1. Stufe nicht L gespielt hat. Wenn Bob in der 1. Stufe L gespielt hat, dann spiele in Stufe 2 T." Bob habe die Strategie $CCCCCCCCCC$. Dieses Paar von Strategien ist ein Nash Gleichgewicht des Spiels G^2, induziert aber nicht in jedem Teilspiel von G^2 ein Nash Gleichgewicht.

Lösung zu Aufgabe 3

a) bis d):



e) Das Bayesianische Nash Gleichgewicht lautet: Beide gestehen, falls sie egoistisch sind und leugnen, falls sie altruistisch sind.