Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund — Fakultät Wirtschaftswissenschaften — 23. September 2024

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer	☐☐☐☐☐☐	Nachname	____________
Studiengang	____________	Vorname	____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus drei Aufgaben, jede der Aufgaben besteht aus fünf Teilaufgaben a) bis e), für welche je maximal sechs Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 3 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 3 sind unabhängig voneinander lösbar.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern oder auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten. Ordnen sie ihre Angaben bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1			**Gesamtpunkte Aufgabe 1**		☐ / 30
Punkte	a) ☐ / 6	b) ☐ / 6	c) ☐ / 6	d) ☐ / 6	e) ☐ / 6
Aufgabe 2			**Gesamtpunkte Aufgabe 2**		☐ / 30
Punkte	a) ☐ / 6	b) ☐ / 6	c) ☐ / 6	d) ☐ / 6	e) ☐ / 6
Aufgabe 3			**Gesamtpunkte Aufgabe 3**		☐ / 30
Punkte	a) ☐ / 6	b) ☐ / 6	c) ☐ / 6	d) ☐ / 6	e) ☐ / 6

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1: Statische Spiele unter vollständiger Information

Adrian, Betül und Colin wohnen als WG in einer Mietwohnung und veranstalten einen Putztag, bei welchem jede:r Mitbewohner:in $x_i \geq 0$ Stunden putzt, $i = A, B, C$. Die Entscheidungen über x_i werden gleichzeitig getroffen und können später nicht revidiert werden. Der Nutzen von Person i hängt wie folgt ab von allen Entscheidungen x_j, $j = A, B, C$:

$$u_i(x_A, x_B, x_C) = 2\sqrt{x_A + x_B + x_C} - x_i \ , \ i = A, B, C$$

a) Wie lautet das Maximierungsproblem von Adrian? Wie lautet die Bedingung erster Ordnung für die Nutzen-maximierende Menge x_A bei gegebenen Entscheidungen x_B und x_C?

b) Wie lautet die beste Antwort von Adrian auf die Entscheidungen seiner Mitbewohner:innen? Achten Sie hierbei auf mögliche Fallunterscheidungen!

c) Geben Sie eine Bedingung an, die jedes Nash Gleichgewicht in reinen Strategien erfüllen muss.

d) Geben Sie ein symmetrisches Nash Gleichgewicht (x_A^*, x_B^*, x_C^*) an und berechnen Sie die Nutzenwerte der Mitbewohner:innen in diesem Gleichgewicht.

e) Geben Sie eine Aufteilung $(x_A^{**}, x_B^{**}, x_C^{**})$ an, welche die Summe der Nutzen aller Mitbewohner:innen maximiert. Ist diese Aufteilung ein Nash Gleichgewicht?

Aufgabe 2 zu Kapitel 2:
Dynamische Spiele unter vollständiger Information

Harry und Rick möchten einen Geldbetrag $X > 0$ mit folgendem Mechanismus aufteilen: Harry schlägt Rick eine Aufteilung (H, R) vor, wobei Harry H bekommt und Rick R. Ein solcher Vorschlag ist gültig, falls $H, R \geq 0$ und $H + R = X$. Rick entscheidet danach, den Vorschlag abzulehnen oder anzunehmen. Lehnt Rick ab, so bekommen beide 0. Andernfalls wird der Vorschlag (H, R) durchgeführt.

Während Harry sich nur für sein eigenes Geld interessiert, seine Nutzenfunktion also durch $u_H(H, R) = H$ gegeben ist, hängt die Nutzenfunktion von Rick von beiden monetären Zahlungen H und R ab:

$$u_R(H,R) = \begin{cases} 6R - 3H & \text{, falls } H > R \\ \underbrace{R + 2H}_{>0} & \text{, falls } H \leq R \end{cases}$$

a) Welche gültige Aufteilung (H, R) würde Harry wählen, wenn er diese alleine durchsetzen könnte? Welche würde Rick in diesem Fall wählen? $H = X$ $R = H = \frac{1}{2}X$

b) Welche gültige Aufteilungen (H, R) generieren einen Nutzenwert von höchstens null für Rick?

c) Welche gültigen Vorschläge (H, R) würde Rick annehmen? (Falls Rick indifferent zwischen Annehmen und Ablehnen ist, entscheidet sich Rick für Annehmen.)

d) Welchen derjenigen gültigen Vorschläge (H, R), die Rick annimmt, findet Harry am besten?

e) Wie lautet das teilspielperfekte Nash Gleichgewicht dieses Spiels? Achten Sie darauf, die Strategien vollständig anzugeben!

a) drei Kandidaten für Max-Stellen von U_R

$(H,R) = (X, 0) \rightsquigarrow U_R = -3X$

$(H,R) = (0, X) \rightsquigarrow U_R = \cancel{X}X$ ~~← Max-Stelle~~

$(H,R) = (\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}X) \rightsquigarrow U_R = \frac{3}{2}X$ ← Max-Stelle

b) $6R - 3H \leq 0 \Leftrightarrow 6R \leq 3H \Leftrightarrow 2R \leq H = X - R$

$\Leftrightarrow 3R \leq X \Leftrightarrow R \leq \frac{1}{3}X$

c) nehme an (als Rick) falls $R > \frac{1}{3}X$

d) $\rightarrow H = \frac{2}{3}X$

e) $H = \frac{2}{3}X$, $S_R = \begin{cases} \text{lehne ab, falls } H > \frac{2}{3}X \\ \text{nehme an, falls } H \leq \frac{2}{3}X \end{cases}$

Aufgabe 3 zu Kapitel 3: Statische Spiele unter unvollständiger Information

B kann einen guten [„gT"] oder einen schlechten [„sT"] Tag haben und er kann eine selbstbewusste [„sG"] oder eine niedergeschlagene [„nG"] Gestik haben. Die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden vier Zustände lauten $\mathbb{P}(gT, sG) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(gT, nG) = 0$, $\mathbb{P}(sT, sG) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(sT, nG) = \frac{1}{3}$.

A und B wissen, dass sich B in diesen vier Zuständen befinden kann und sie kennen auch deren Wahrscheinlichkeiten. A kann allerdings nur die Gestik von B beobachten und nicht, ob B einen guten oder schlechten Tag hat. B wiederum weiß nur, ob er einen guten oder ob er einen schlechten Tag hat und ist sich seiner Gestik nicht bewusst.

Begründen Sie Ihre Antworten, falls möglich!

a) Wie hoch ist aus Sicht von A die Wahrscheinlichkeit, dass B einen guten Tag (gT) hat, wenn A eine selbstbewusste Gestik (sG) bei B beobachtet? Welche Wahrscheinlichkeit ordnet A dem Fall zu, dass B einen guten Tag (gT) hat, wenn A eine niedergeschlagene Gestik (nG) bei B beobachtet?
$\mathbb{P}(gT|sG) =$
$\mathbb{P}(gT|nG) =$

A und B treffen sich zum Tennis, wobei beide die Möglichkeit haben defensiv (D) oder offensiv (O) zu spielen. Sie können ihre Entscheidungen D/O auf ihre Beobachtungen konditionieren (A: sG/nG, B: gT/sT).

b) Geben Sie alle Strategien von A an und geben Sie alle Strategien von B an!

Die Auszahlungsmatrix hängt davon ab, ob B einen guten oder einen schlechten Tag hat:

		B: O	B: D
A	O	(-2,2)	(-1,1)
	D	(-1,1)	(0,0)

B hat einen guten Tag

		B: O	B: D
A	O	(2,-2)	(1,-1)
	D	(1,-1)	(0,0)

B hat einen schlechten Tag

c) Welche Strategie sollte B wählen?

Wenn Sie c) nicht beantworten können, legen Sie für die folgenden Teilaufgaben d) und e) eine beliebige Strategie für B fest.

d) Nehmen Sie an, dass A eine niedergeschlagene Gestik bei B beobachtet. Wie sollte sich A entscheiden? Nehmen Sie nun an, dass A eine selbstbewusste Gestik bei B beobachtet und dass B die in c) bestimmte Strategie spielt. Berechnen Sie die Erwartungsnutzen von A, falls A O bzw. falls A D wählt.

e) Geben Sie ein Bayesianisches Nash Gleichgewicht dieses Spiels an.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Das Maximierungsproblem von Person i lautet:

$$\max_{x_i \geq 0} \; 2\sqrt{x_A + x_B + x_C} - x_i$$

Die Bedingung erster Ordnung von Person i lautet:

$$\frac{2}{2\sqrt{x_A + x_B + x_C}} - 1 \leq 0, \;\; (= 0, \text{ falls } x_i > 0)$$

b) Die beste Antwort von Adrian berechnet sich durch Auflösen der Bedingung erster Ordnung nach x_A:

$$\frac{2}{2\sqrt{x_A + x_B + x_C}} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x_A + x_B + x_C} \Leftrightarrow 1 \leq x_A + x_B + x_C \Leftrightarrow x_A \geq 1 - x_B - x_C \;,$$

wobei die Ungleichung bindend ist, falls $x_A > 0$. Die beste Antwort lautet also:

$$x_A = \begin{cases} 1 - x_B - x_C & , \text{ falls } x_B + x_C < 1 \\ 0 & , \text{ falls } x_B + x_C \geq 1 \end{cases}$$

c) Nehme zunächst an, dass $x_i > 0$ für alle i im Nash Gleichgewicht. Dann muss die Bedingung erster Ordnung für alle i mit Gleichheit erfüllt sein. Es muss also gelten:

$$\frac{2}{2\sqrt{x_A + x_B + x_C}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = \sqrt{x_A + x_B + x_C} \Leftrightarrow x_A + x_B + x_C = 1$$

Nehme nun an, dass zum Beispiel Adrian $x_A = 0$ wählt. Dann gilt für Adrian:

$$\frac{2}{2\sqrt{x_B + x_C + x_D}} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x_B + x_C \geq 1$$

Die Bedingung $x_A + x_B + x_C = 1$ lässt also zu, dass bis zu zwei Mitbewohner:innen $x_i = 0$ wählen.

d) Der Vektor $(x_A^*, x_B^*, x_C^*) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ erfüllt die geforderte Bedingung. Die Nutzenwerte lauten $u_i(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 2\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

e) Die Summe der Nutzen lautet $6\sqrt{x_A + x_B + x_C} - x_A - x_B - x_C = 6\sqrt{X} - X$ für $X = x_A + x_B + x_C$. Die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum dieser Zielfunktion lautet $\frac{6}{2\sqrt{X^{**}}} - 1 \leq 0$ $(= 0$, falls $X^{**} > 0)$. Umgeformt ergibt sich $3 \leq \sqrt{X^{**}} \Leftrightarrow X^{**} \geq 9$. X^{**} ist daher positiv und die Ungleichung muss bindend sein. Jede Aufteilung mit $x_A + x_B + x_C = 9$ maximiert also die Summe der Nutzen aller Mitbewohner:innen. Zum Beispiel die Aufteilung $x_i^{**} = 3$ für alle i. (Diese induziert die Nutzenwerte $u_i\,(3, 3, 3) = 6\sqrt{9} - \frac{1}{3} = \frac{53}{3}$.)

Lösung zu Aufgabe 2

a) Da Harry sich nur für die Komponente H interessiert und diese so groß wie möglich sein soll, würde er $(H, R) = (X, 0)$ wählen.

Ricks Nutzenfunktion ist stückweise linear. Da diese Funktion in keinem Bereich flach verläuft, muss das Maximum in einem der drei Punkte $(X, 0)$, $(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}X)$ oder $(0, X)$ liegen. Es gilt:

- $(H, R) = (X, 0)$: Fall $H > R \rightarrow u_R(H, R) = 6R - 3H = 6 \cdot 0 - 3 \cdot X = -3x$
- $(H, R) = (\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}X)$: Fall $H \leq R \rightarrow u_R(H, R) = R + 2H = \frac{1}{2}X + 2\frac{1}{2}X = \frac{3}{2}X$
- $(H, R) = (0, X)$: Fall $H \leq R \rightarrow u_R(H, R) = R + 2H = X + 2 \cdot 0 = X$

Also würde Rick $(H, R) = (\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}X)$ wählen.

b)
Falls $H > R$: $u_R(H, R) = 6R - 3H \leq 0 \Leftrightarrow 6R \leq 3H \Leftrightarrow 2R \leq H$.
Falls $H \leq R$: $u_R(H, R) = R + 2H = R + H + H = X + H > 0$ für alle H.
Alle gültige Aufteilungen (H, R) mit $H \geq 2R$ generieren einen Nutzen von höchstens null für Rick.

c) Rick würde alle gültigen Vorschläge (H, R) mit $H \leq 2R$ annehmen.

d) Damit Rick annimmt, muss $H \leq 2R$ gelten. Unter dieser Bedingung findet Harry den Vorschlag $(H, R) = (2R, R)$ am besten. Mit $H + R = X$ folgt $(2R, R) = (\frac{2}{3}X, \frac{1}{3}X)$.

e) Das teilspielperfekte Nash Gleichgewicht lautet: Harry schlägt $(H, R) = (\frac{2}{3}X, \frac{1}{3}X)$ vor und Rick lehnt alle Vorschläge mit $H < 2R$ ab und nimmt alle Vorschläge mit $H \geq 2R$ an.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\mathbb{P}(gT|sG) = \frac{\mathbb{P}(gT,sG)}{\mathbb{P}(gT,sG)+\mathbb{P}(sT,sG)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(gT|nG) = \frac{\mathbb{P}(gT,nG)}{\mathbb{P}(gT,nG)+\mathbb{P}(sT,nG)} = \frac{0}{0+\frac{1}{3}} = 0$

b) $S_A = (OO, OD, DO, DD),\ S_B = (OO, OD, DO, DD)$. Der erste Buchstabe bezeichnet jeweils die Aktion falls A sG bzw. falls B gT beobachtet und der zweite Buchstabe bezeichnet jeweils die Aktion falls A nG bzw. falls B sT beobachtet.

c) Im Spiel „B hat einen guten Tag" ist die Aktion D für B durch die Aktion O dominiert. Im Spiel „B hat einen schlechten Tag" ist die Aktion O für B durch D dominiert. B sollte also die Strategie „O, falls guter Tag; D, falls schlechter Tag" bzw. „OD" wählen.

d) Wenn A eine niedergeschlagene Gestik bei B beobachtet, weiß A, dass B einen schlechten Tag hat ($\mathbb{P}(gT|nG) = 0$). Im Spiel „B hat einen schlechten Tag"ist D für A durch O dominiert. A sollte dann also O spielen. Wenn A eine selbstbewusste Gestik bei B beobachtet, sind beide Spiele gleich wahrscheinlich: $\mathbb{P}(gT|sG) = \mathbb{P}(sT|sG) = \frac{1}{2}$. Wenn B die in c) ermittelte Strategie OD spielt, erzielt A bei der Aktion O den Erwartungsnutzen $\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$. Falls A die Aktion D spielt, erzielt A den Erwartungsnutzen $\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{2}$.

e) Die beiden Bayesianischen Nash Gleichgewichte in reinen Strategien lauten (OO, OD) und (DO, OD).