Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 2. August 2023

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________________

Studiengang ____________________ Vorname ____________________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus drei Aufgaben, jede der Aufgaben besteht aus vier Teilaufgaben a) bis d), für welche je maximal acht Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 3 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 3 sind unabhängig voneinander lösbar.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten Sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern. Sollte der Platz hierfür nicht ausreichen, ordnen Sie Ihre Angaben auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 36 von maximal 90 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1						**Gesamtpunkte Aufgabe 1** ☐	/ 30
Punkte a) ☐	/ 8	Punkte b) ☐	/ 8	Punkte c) ☐	/ 8	Punkte d) ☐	/ 8
Aufgabe 2						**Gesamtpunkte Aufgabe 2** ☐	/ 30
Punkte a) ☐	/ 8	Punkte b) ☐	/ 8	Punkte c) ☐	/ 8	Punkte d) ☐	/ 8
Aufgabe 3						**Gesamtpunkte Aufgabe 3** ☐	/ 30
Punkte a) ☐	/ 8	Punkte b) ☐	/ 8	Punkte c) ☐	/ 8	Punkte d) ☐	/ 8

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1: statische Spiele unter vollständiger Information

Anna und Bob spielen „Schere-Stein-Papier“. Bei diesem Spiel zeigen beide gleichzeitig genau eine von drei Gesten an: „Schere“, „Stein“ oder „Papier“. Dabei gilt, dass „Schere“ gegen „Papier“, „Papier“ gegen „Stein“ und „Stein“ gegen „Schere“ gewinnt. Trifft zweimal dieselbe Geste aufeinander, gilt das Spiel als unentschieden. Ein Sieg führt zur Auszahlung von 1, ein Verlieren führt zu einer Auszahlung von -1 und bei einem Unentschieden resultiert eine Auszahlung von 0.

a) Stellen Sie das Spiel in Normalform dar!

b) Markieren Sie alle besten Antworten von Anna und Bob. Gibt es Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien? Begründen Sie ihre Antwort.

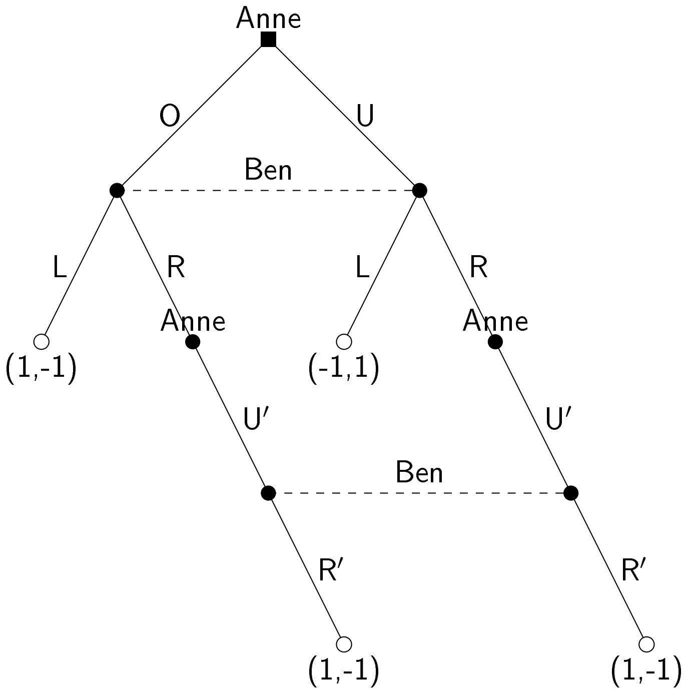
c) Berechnen Sie ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, falls es dieses gibt.

Nun kommt zusätzlich noch die Strategie „Brunnen“ hinzu. Diese Strategie gewinnt gegen „Stein“ und „Schere“, verliert aber gegen „Papier“. Spielen beide „Brunnen“, handelt es sich um ein Unentschieden.

d) Dominiert diese Strategie eine andere? Und wenn ja, dominiert sie diese strikt oder schwach? Können Sie etwas zum Nash Gleichgewicht des Spiels mit „Brunnen“ sagen? Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 2 zu Kapitel 2:
dynamische Spiele unter vollständiger Information

Folgender Spielbaum stellt ein Entscheidungsproblem von Anne und Ben dar; die Notation entspricht der Notation der Vorlesung.



a) Benennen Sie alle reinen Strategien von Anne und Ben und stellen Sie das obige Spiel in Normalform dar.

b) Markieren Sie alle besten Antworten und kennzeichnen Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

c) Zeichnen Sie alle Nash Gleichgewichte aus b) in den Spielbaum ein. Sind diese Gleichgewichte teilspielperfekt? Warum bzw. Warum nicht?

d) Gibt es Gleichgewichte, die Sie nicht plausibel finden? Begründen Sie hierbei Ihre Antwort.

Aufgabe zu Kapitel 3: statische Spiele unter unvollständiger Information

Eine geschlossene Kiste enthält eine Gold- und zwei Silbermünzen.

Ein Kobold entfernt eine der drei Münzen (je mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Anne und Ben wissen dies, können aber nicht sehen, welche Münze entfernt wurde.

Anne öffnet die Kiste (ohne, dass Ben hineinschauen kann), nimmt sich eine der beiden Münzen und zeigt diese Ben.

Nur wenn Ben richtig rät ob die in der Kiste verbliebene Münze eine Gold- oder Silbermünze ist, darf er diese und Anne die ihrige behalten.

Der Nutzen einer Goldmünze sei für beide 2, der Nutzen einer Silbermünze sei für beide 1. Der Nutzen keiner Münze sei für beide 0.

a) Stellen Sie dieses Spiel anhand eines Spielbaums dar, wobei Sie die Notation der Vorlesung benutzen.

Geben Sie für die Aufgabenteile b) und c) ebenfalls den Rechenweg an.

b) Nehmen Sie an, dass Ben weiß, dass der Kobold Anne per Gedankenkontrolle zwingt jede der beiden verbliebenen Münzen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auszuwählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit vermutet Ben, dass eine Silbermünze in der Kiste verblieben ist, falls Anne eine Silbermünze auswählt und zeigt?

c) Nehmen Sie nun alternativ an, dass Ben weiß, dass der Kobold Anne per Gedankenkontrolle zwingt, eine Silbermünze aus der Kiste zu nehmen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit vermutet Ben nun, dass eine Silbermünze in der Kiste verblieben ist?

Nehmen Sie für den letzten Aufgabenteil abweichend an, dass Ben weiß, dass der Kobold keine Gedankenkontrolle auf Anne anwenden kann.

d) Gibt es eine Strategie von Anne, sodass wenn Ben diese kennt, Ben mit Sicherheit richtig raten kann? Falls ja, beschreiben Sie diese Strategie und begründen Sie Ihre Antwort. Falls nein, begründen Sie, warum nicht.

Lösung zu Aufgabe 1

a) b)

		Bob Schere	Bob Stein	Bob Papier
Anna	Schere	$0\ ,\ 0$	$-1\ ,\ \underline{1}$	$\underline{1}\ ,\ -1$
	Stein	$\underline{1}\ ,\ -1$	$0\ ,\ 0$	$-1\ ,\ \underline{1}$
	Papier	$-1\ ,\ \underline{1}$	$\underline{1}\ ,\ -1$	$0\ ,\ 0$

Das Spiel verfügt über keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, da es kein Strategiekombination gibt, in welcher beide Spieler beste Antworten spielen.

c) Da es sich um ein endliches Spiel handelt (endliche viele Spieler, endlich viele Profile von Strategien), muss ein Nash Gleichgewicht existieren (möglicherweise in gemischten Strategien) – Nash (1950). Also existiert ein NGG in gemischten Strategien. Da das Spiel ein symmetrisches Spiel ist, gibt es ein symmetrisches NGG in gemischten Strategien. Das bedeutet, dass für die beiden Mischungen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von Anna und $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ von Bob gilt, dass $\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, 3$.

Die Erwartungsnutzen von Anna bei gemischter Strategie $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ von Bob lauten:

$$\begin{aligned} EU_A(\text{Schere}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) &= 0 \cdot \beta_1 + (-1) \cdot \beta_2 + 1 \cdot \beta_3 \\ EU_A(\text{Stein}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) &= 1 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 + (-1) \cdot \beta_3 \\ EU_A(\text{Papier}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) &= (-1) \cdot \beta_1 + 1 \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3 \end{aligned}$$

Anna wird nur dann zwischen den reinen Strategien mischen, wenn sie indifferent ist. Also folgt als Gleichgewichtsbedingung, dass alle drei Erwartungsnutzen gleich sein müssen:

$$\begin{aligned} -\beta_2 + \beta_3 &= \beta_1 - \beta_3 \\ -\beta_1 + \beta_3 &= \beta_1 - \beta_3 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen implizieren $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. Da sich die drei Wahrscheinlichkeiten auf 1 addieren müssen, gilt $\beta_1^* = \beta_2^* = \beta_3^* = \frac{1}{3}$. Aufgrund der Symmetrie des Spiels gilt $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha_3^* = \frac{1}{3}$.

Das gemischte Gleichgewicht lautet also:

$$\left(\frac{1}{3}\text{Schere} + \frac{1}{3}\text{Stein} + \frac{1}{3}\text{Papier}, \frac{1}{3}\text{Schere} + \frac{1}{3}\text{Stein} + \frac{1}{3}\text{Papier}\right)$$

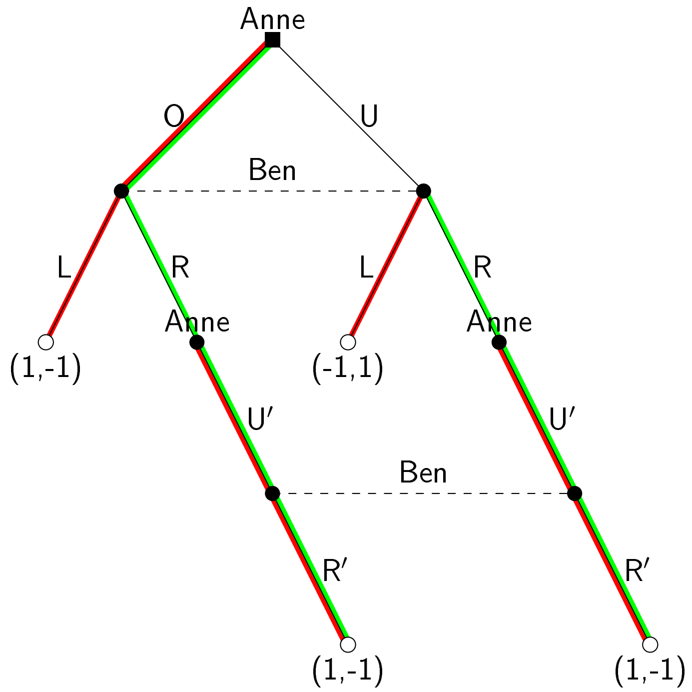
d) Genauso wie Stein gewinnt der Brunnen gegen die Schere und verliert gegen Papier, gewinnt aber seinerseits gegen den Stein. Somit gibt es mindestens eine Strategie des Gegenspielers, welche für Brunnen eine höhere Auszahlung vorsieht als für Stein und in allen anderen Fällen resultieren dieselben Auszahlungen. Deshalb dominiert Brunnen Stein schwach. Im Nash Gleichgewicht ersetzt der Brunnen den Stein.

Lösung zu Aufgabe 2

a), b)
Anne: OU′, UU′
Ben: LR′, RR′

	LR′	RR′
OU′	1,-1*	1,-1*
UU′	-1,1	1,-1

c)

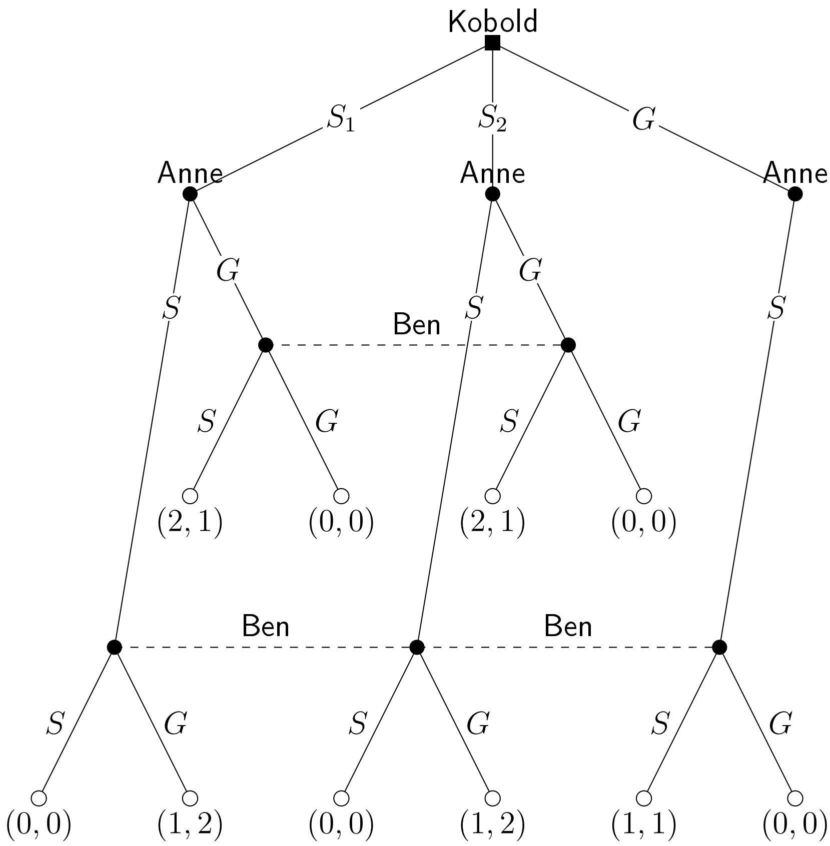


Beide Nash Gleichgewichte sind teilspielperfekt, da es nur ein Teilspiel gibt (das gesamte Spiel).

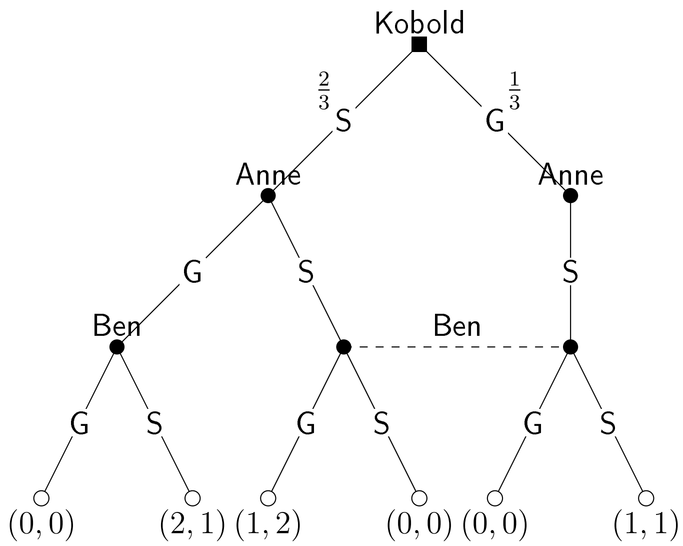
d) Das Nash Gleichgewicht (OU′,RR′) ist nicht plausibel. Wenn Anne mit einer winzigen Wahrscheinlichkeit U wählen würde, würde sich Ben durch L strikt besser stellen: RR′ ist für Ben durch LR′ schwach dominiert.

Lösung zu Aufgabe 3

a)



oder



b)

$$p_B(S \text{ in Kiste} \mid \text{Anne zeigt } S) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

c)

$$p_B(S \text{ in Kiste} \mid \text{Anne zeigt } S) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{3}$$

d) Ja, die Strategie von Anne lautet: Zeige Gold, falls der Kobold eine Silbermünze entfernt hat und zeige Silber, falls der Kobold die Goldmünze entfernt hat.

Wenn Ben diese Strategie kennt, weiß er welche Münze durch den Kobold entfernt wurde nachdem Anne ihm ihre Münze gezeigt hat. Daher weiß er auch, welche Münze noch in der Kiste liegt.