Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund	Fakultät Wirtschaftswissenschaften	29. September 2023

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	Nachname	____________
Studiengang	____________	Vorname	____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus drei Aufgaben, jede der Aufgaben besteht aus vier Teilaufgaben a) bis d), für welche je maximal acht Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 3 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 3 sind unabhängig voneinander lösbar.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten Sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern. Sollte der Platz hierfür nicht ausreichen, ordnen Sie Ihre Angaben auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 36 von maximal 90 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1			**Gesamtpunkte Aufgabe 1** ☐ / 30
Punkte a) ☐ / 8	Punkte b) ☐ / 8	Punkte c) ☐ / 8	Punkte d) ☐ / 8
Aufgabe 2			**Gesamtpunkte Aufgabe 2** ☐ / 30
Punkte a) ☐ / 8	Punkte b) ☐ / 8	Punkte c) ☐ / 8	Punkte d) ☐ / 8
Aufgabe 3			**Gesamtpunkte Aufgabe 3** ☐ / 30
Punkte a) ☐ / 8	Punkte b) ☐ / 8	Punkte c) ☐ / 8	Punkte d) ☐ / 8

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1: statische Spiele unter vollständiger Information

Claudio und Daniela gehen auf die Pirsch. Sie können entweder gemeinsam einen Hirsch erlegen oder einzeln ein Kaninchen jagen. Der Hirsch würde eine relativ große Mahlzeit bedeuten, wobei das Kaninchen zwar lecker aber nicht so sättigend ist.

Die Hirschjagd ist ziemlich anspruchsvoll und benötigt die Kooperation von Claudio und Daniela. Wenn eine:r der beiden alleine auf die Hirschjagd geht, sind die Erfolgschancen minimal.

Die Auszahlungsmatrix sei wie folgt:

		Daniela	
		Hirsch	Kaninchen
Claudio	Hirsch	$5\ ,\ 5$	$0\ ,\ 4$
	Kaninchen	$4\ ,\ 0$	$3\ ,\ 3$

a) Kennzeichnen Sie wie in der Vorlesung die besten Antworten von Claudio und Daniela und die beiden Nash Gleichgewichte in reinen Strategien in der Auszahlungsmatrix.

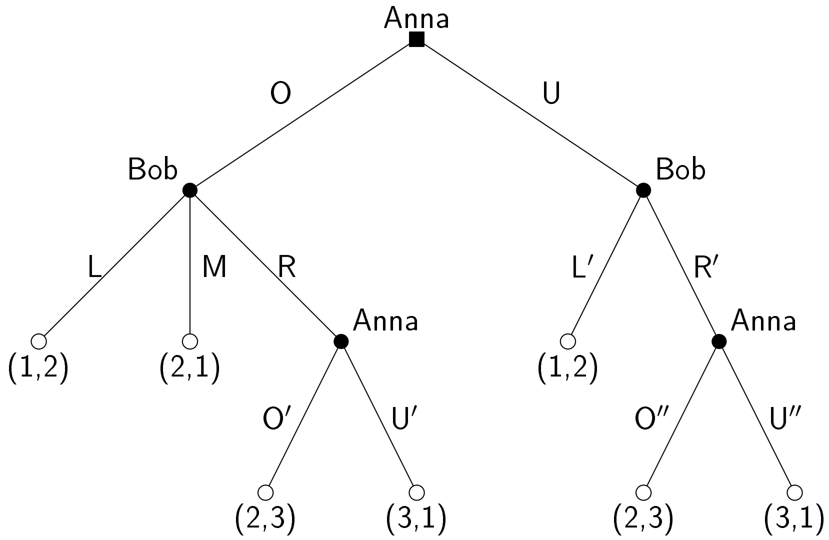
b) Nehmen Sie an, dass Daniela mit Wahrscheinlichkeit p, $0 \leq p \leq 1$, auf die Hirschjagd geht. Wie lautet der Erwartungsnutzen von Claudio, falls er selbst einen Hirsch bzw. Kaninchen jagen möchte?

c) Wie groß darf p maximal sein, sodass „Kaninchen" den Erwartungsnutzen von Claudio maximiert?

d) Nennen Sie für jedes der beiden Nash Gleichgewichte in reinen Strategien einen Grund, welcher für dieses Nash Gleichgewicht im Gegensatz zum jeweils anderen Nash Gleichgewicht spricht.

Aufgabe 2 zu Kapitel 2:
dynamische Spiele unter vollständiger Information

Folgender Spielbaum stellt ein Entscheidungsproblem von Anna und Bob dar; die Notation entspricht der Notation der Vorlesung.



a) Wie viele Teilspiele hat das hier dargestellte Spiel? Wie viele reine Strategien haben Anna und Bob und welche sind das?

b) Markiere für jeden Entscheidungsknoten die besten Entscheidungen für Anna bzw. Bob im Spielbaum.

c) Welche teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien hat das Spiel?

d) Warum gibt es kein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht, welches eine Auszahlung von (2,3) vorsieht? Warum kooperieren Anna und Bob nicht?

Aufgabe zu Kapitel 3: statische Spiele unter unvollständiger Information

Angelehnt an das Spiel in Normalform von Aufgabe 1 sei nun das folgende erweiterte Spiel:

		Daniela: Hirsch	Daniela: Kaninchen
Claudio	Hirsch	$5\ ,\ 5$	$t_C\ ,\ 4$
	Kaninchen	$4\ ,\ t_D$	$3\ ,\ 3$

Die Variablen t_C und t_D sind die Typen von Claudio und Daniela. Claudio kennt seinen Typen t_C und Daniela kennt ihren Typen t_D. Keine:r kennt aber den Typen der jeweils anderen Person. Beide wissen, dass die Typen unabhängig und uniform-verteilt auf dem Intervall $[a, b]$ sind, wobei a und b reelle Zahlen mit $a < 0 < b$ sind.

Betrachten Sie folgende Strategie von Daniela:

$$s_D(t_D) = \begin{cases} \text{Hirsch} & \text{, falls } t_D \geq 0 \\ \text{Kaninchen} & \text{, falls } t_D < 0 \end{cases}$$

a) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit von „Hirsch“ bei Danielas Strategie durch einen Term mit a und b aus.

b) Wie lautet der Erwartungsnutzen von Claudio bei gegebenem Typen t_C, wenn Claudio Hirsch und Daniela die oben beschriebene Strategie s_D spielt? Wie lautet dieser Erwartungsnutzen, wenn Claudio stattdessen Kaninchen spielt?

c) Geben Sie eine reine Strategie von Claudio in Abhängigkeit seines Typens t_C an, welche eine beste Antwort auf die oben beschriebene Strategie s_D von Daniela ist.

Stellen Sie sich vor, dass Eduard den beiden Jäger:innen zuschaut, er aber die Typen der beiden nicht beobachten könne.

d) Welche Gleichung müssen a und b erfüllen, sodass es für Eduard so scheint, als ob Claudio und Daniela das gemischte Gleichgewicht $\left(\frac{3}{4} \cdot \text{Hirsch} + \frac{1}{4} \cdot \text{Kaninchen}, \frac{3}{4} \cdot \text{Hirsch} + \frac{1}{4} \cdot \text{Kaninchen}\right)$ des Spiels von Aufgabe 1 spielen?

Lösung zu Aufgabe 1

a)

		Daniela: Hirsch	Daniela: Kaninchen
Claudio	Hirsch	$\underline{5}\ ,\ \underline{5}$ *	$0\ ,\ \underline{4}$
	Kaninchen	$\underline{4}\ ,\ 0$	$\underline{3}\ ,\ \underline{3}$ *

b)

$$\begin{aligned} EU_C(\text{Hirsch}, p \cdot \text{Hirsch} + (1-p) \cdot \text{Kaninchen}) &= 5 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 5p \\ EU_C(\text{Kaninchen}, p \cdot \text{Hirsch} + (1-p) \cdot \text{Kaninchen}) &= 4 \cdot p + 3 \cdot (1-p) = 3 + p \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$5p \leq 3 + p \Leftrightarrow 4p \leq 3 \Leftrightarrow p \leq \frac{3}{4}$$

Daniela darf Hirsch mit Wahrscheinlichkeit von höchstens 75% spielen, sodass Kaninchen für Claudio dessen Erwartungswert maximiert.

d)

Grund für (Hirsch, Hirsch): Dieses Nash Gleichgewicht ist das einzige Pareto effiziente Ergebnis des Spiels.

Grund für (Kaninchen, Kaninchen): Dieses Nash Gleichgewicht minimiert das Risiko für die Spieler:innen bei Unsicherheit über die Entscheidung des/der jeweils anderen Person.

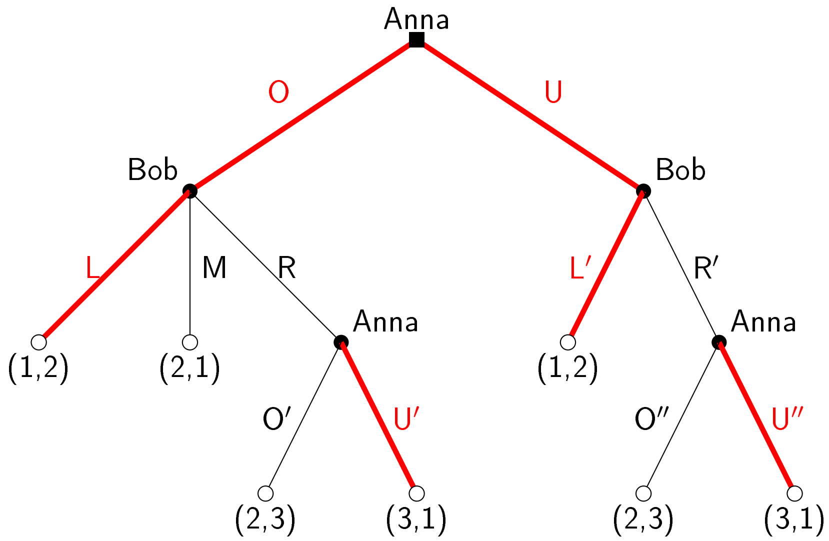
Lösung zu Aufgabe 2

a) Das Spiel enthält 5 Teilspiele, jeweils beginnend bei einem der 5 Entscheidungsknoten. Bob hat die reinen Strategien $\{L, M, R\} \times \{L', R'\} = \{LL', LR', ML', MR', RL', RR'\}$, also insgesamt 6 reine Strategien. Anna hat die reinen Strategien

$$\{O, U\} \times \{O', U'\} \times \{O'', U''\} = \{OO'O'', OO'U'', OU'O'', OU'U'', UO'O'', UO'U'', UU'O'', UU'U''\},$$

also insgesamt 8 reine Strategien.

b)



c) OU'U",LL" und UU'U",LL'

d) Sollten sich Bob und Anna absprechen, einen der beiden Pfade zu wählen, welcher ausgehend von den ermittelten teilspielperfekten Gleichgewichten mit der Auszahlung von (1,2) zu der Paretoverbesserung von (2,3) führt, kann Bob nicht sicher sein, dass Anna sich auch tatsächlich an diese Absprache hält. Immerhin steht Anna mit U' und U" eine Option offen, mit welcher sie sich besser stellen kann, somit besteht ein Anreiz von dieser Kooperation abzuweichen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Für eine uniform verteilte Zufallsvariable u auf dem Intervall $[a, b]$ gilt (mit $a \leq \bar{u} \leq b$):

$$Prob(u \leq \bar{u}) = Prob(u < \bar{u}) = \frac{\bar{u} - a}{b - a}$$

Demnach:

$$Prob(Hirsch) = Prob(t_D \geq 0) = 1 - Prob(t_D < 0) = 1 - \frac{0 - a}{b - a} = \frac{b}{b - a}$$

b)

$$\begin{aligned} EU_C(Hirsch, s_D|t_C) &= \frac{b}{b-a} \cdot 5 + \frac{-a}{b-a} \cdot t_C = \frac{5b - t_C a}{b - a} \\ EU_C(Kaninchen, s_D|t_C) &= \frac{b}{b-a} \cdot 4 + \frac{-a}{b-a} \cdot 3 = \frac{4b - 3a}{b - a} \end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$EU_C(Hirsch, s_D|t_C) \geq EU_C(Kaninchen, s_D|t_C) \Leftrightarrow \frac{5b - t_C a}{b - a} \geq \frac{4b - 3a}{b - a} \Leftrightarrow 5b - t_C a \geq 4b - 3a \Leftrightarrow t_C \overset{a<0!}{\geq} 3 + \frac{b}{a}$$

Also ist

$$s_C(t_C) = \begin{cases} \text{Hirsch} & \text{, falls } t_C \geq 3 + \frac{b}{a} \\ \text{Kaninchen} & \text{, falls } t_C < 3 + \frac{b}{a} \end{cases}$$

eine Beste Antwort von Claudio auf die Strategie s_D von Daniela.

d) Daniela spielt Hirsch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{b}{b-a}$. Es muss also gelten:

$$\frac{b}{b - a} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4b = 3(b - a) \Leftrightarrow b = -3a$$

Claudio spielt Hirsch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{b-3-\frac{b}{a}}{b-a}$. Es muss also gelten:

$$\frac{b - 3 - \frac{b}{a}}{b - a} = \underbrace{\frac{b}{b - a}}_{=\frac{3}{4}} - \frac{3 + \frac{b}{a}}{b - a} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3 + \frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow b = -3a \checkmark$$