Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 3. August 2022

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________________

Studiengang ____________________ Vorname ____________________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus vier Aufgaben, **von welchen drei zu bearbeiten sind.** Streichen Sie bitte eindeutig erkennbar diejenige Aufgabe, die nicht gewertet werden soll. Jede der Aufgaben besteht aus vier Teilaufgaben a) bis d), für welche je maximal acht Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 4 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 4 sind unabhängig voneinander lösbar. Werden alle diese vier Aufgaben bearbeitet, so werden nur die Aufgaben 1 bis 3 bewertet.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten Sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern. Sollte der Platz hierfür nicht ausreichen, ordnen Sie Ihre Angaben auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 36 von maximal 90 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1						**Gesamtpunkte Aufgabe 1**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8
Aufgabe 2						**Gesamtpunkte Aufgabe 2**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8
Aufgabe 3						**Gesamtpunkte Aufgabe 3**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8
Aufgabe 4						**Gesamtpunkte Aufgabe 4**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1:
statische Spiele unter vollständiger Information

Betrachten Sie folgendes Spiel in Normalform:

		Ben L	Ben M	Ben R
Anna	o	$0\ ,\ 4$	$7\ ,\ 0$	$6\ ,\ 3$
Anna	m	$7\ ,\ 0$	$0\ ,\ 4$	$6\ ,\ 3$
Anna	u	$3\ ,\ 5$	$3\ ,\ 5$	$5\ ,\ 6$

a) Hat Anna eine strikt dominierte Strategie? Wenn ja: welche und warum?

b) Es sei angenommen, dass Anna die gemischte Strategie $(p_o, p_m, p_u) = (p, 1-p, 0)$ spielt (mit $0 \leq p \leq 1$), d.h. sie spielt o mit Wahrscheinlichkeit p und sie spielt m mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ (und niemals u).

Wie lauten die Erwartungsnutzen von Ben, wenn er eine seiner reinen Strategien spielt?

$$\begin{aligned}
EU_B((p,1-p,0),L) &= \qquad \cdot p + \qquad \cdot(1-p) \ = \\
EU_B((p,1-p,0),M) &= \qquad \cdot p + \qquad \cdot(1-p) \ = \\
EU_B((p,1-p,0),R) &= \qquad \cdot p + \qquad \cdot(1-p) \ =
\end{aligned}$$

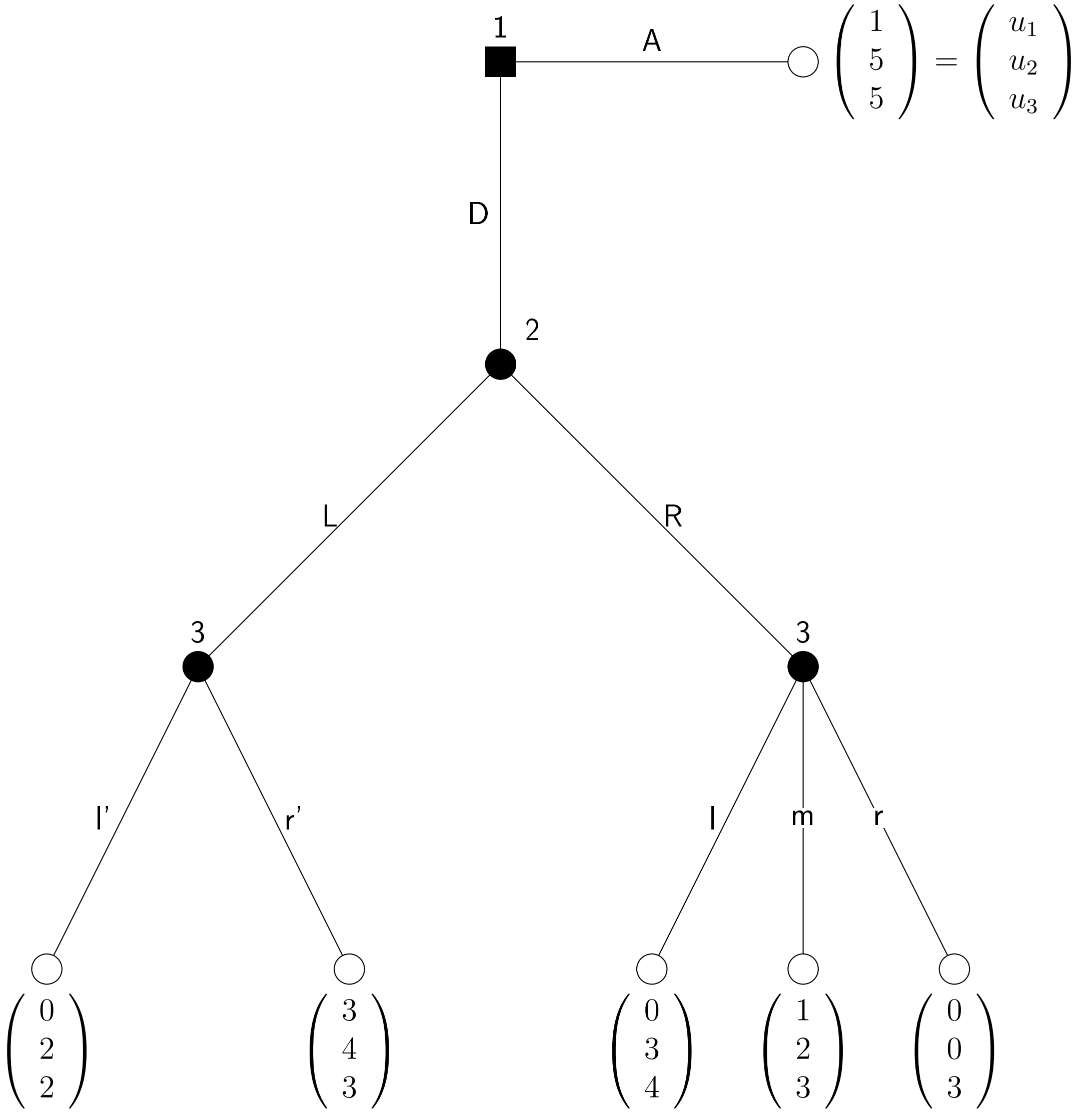
c) Wie lauten die reinen besten Antworten von Ben auf die gemischten Strategien $(p_o, p_m, p_u) = (p, 1-p, 0)$ von Anna (mit $0 \leq p \leq 1$)? Falls mehrere reine Strategien von Ben eine beste Antwort sind, sind alle diese Strategien anzugeben.

$$\text{Beste Antwort/en von Ben auf } (p_o, p_m, p_u) = (p, 1-p, 0) = \begin{cases} & \text{falls } p < \frac{1}{4} \\ & \text{falls } p = \frac{1}{4} \\ & \text{falls } \frac{1}{4} < p < \frac{3}{4} \\ & \text{falls } p = \frac{3}{4} \\ & \text{falls } p > \frac{3}{4} \end{cases}$$

d) Geben Sie ein Nash Gleichgewicht des Spiels an. Ist dies das einzige Nash Gleichgewicht des Spiels?

Aufgabe 2 zu Kapitel 2:
dynamische Spiele unter vollständiger Information

Betrachten Sie folgende Extensivform eines drei-Personen-Spiels mit vollkommener Information:



a) Wie viele reine Strategien hat Spieler 3?

b) Wie viele Teilspiele hat das Spiel? (Das Spiel selbst ist ebenfalls ein Teilspiel.)

c) Wie lautet das eindeutige teilspielperfekte Nash Gleichgewicht?

d) Gibt es ein Nash Gleichgewicht, welches nicht teilspielperfekt ist? Welches?

Aufgabe zu Kapitel 3: statische Spiele unter unvollständiger Information

Betrachten Sie ein Cournot Duopol mit der linearen inversen Nachfragefunktion $P(Q) = a - Q$, falls $Q \leq a$ und $P(Q) = 0$ andernfalls, wobei $Q = q_1 + q_2$ die Summe der Mengen $q_1, q_2 \geq 0$ beider Firmen bezeichnet. Die Stückkosten seien für beide Firmen gleich $c > 0$. Der Nachfrageparameter a ist unsicher: Er kann die Werte a_H, a_M und a_L jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Es gilt $a_H > a_M > a_L > c$ mit $a_M = \frac{1}{2}(a_H + a_L)$. Die beiden Firmen wählen die beiden Mengen q_1, q_2 simultan.

Gehen Sie zunächst davon aus, dass keine der beiden Firmen a beobachten kann.

a) Welche Mengen wählen die beiden Firmen im Bayesianischen Nash Gleichgewicht?

Gehen Sie nun für die folgenden Teilaufgaben davon aus, dass Firma 1 a genau dann beobachtet, falls $a = a_L$ und dass Firma 2 a genau dann beobachtet, falls $a = a_H$.

b) Welche (bedingten) Wahrscheinlichkeiten ordnen die Firmen nun den Realisierungen des Parameters a zu?

Firma 1 ordnet a folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten zu:

	Firma 1 beobachtet a_L	Firma 1 beobachtet a_L nicht
a_H		
a_M		
a_L		

Firma 2 ordnet a folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten zu:

	Firma 2 beobachtet a_H	Firma 2 beobachtet a_H nicht
a_H		
a_M		
a_L		

c) Was glauben die Firmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit welche Beobachtung die jeweils andere Firma gemacht hat (bedingt auf die eigene Beobachtung)? Es wird hierbei die in der Vorlesung eingeführte Notation für Beliefs benutzt.

p_1(F 2 beobachtet a_H|F 1 beobachtet a_L) = $\boxed{}$

p_1(F 2 beobachtet a_H|F 1 beobachtet a_L nicht) = $\boxed{}$

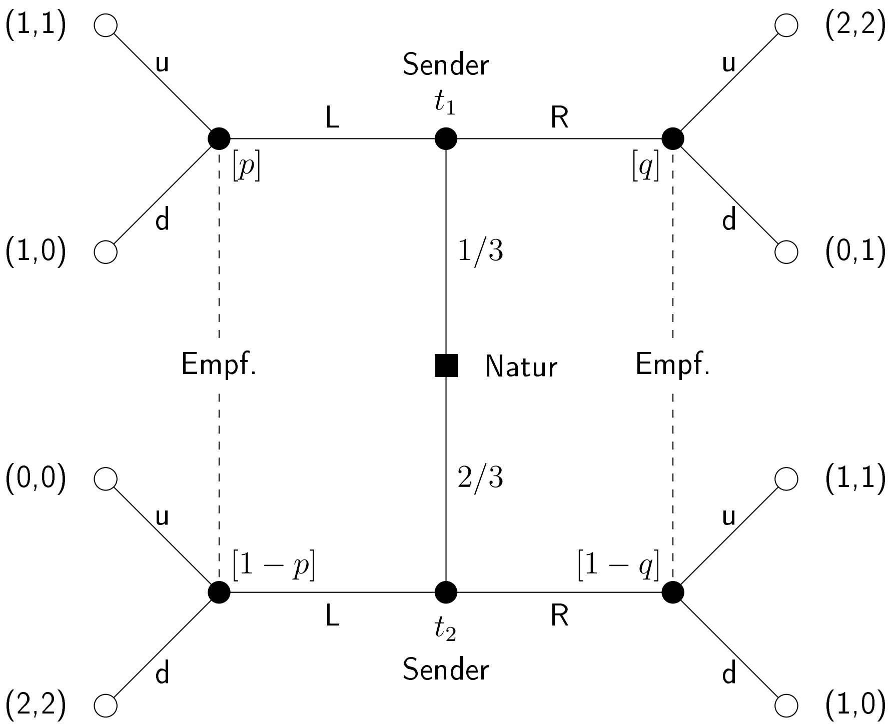
p_2(F 1 beobachtet a_L|F 2 beobachtet a_H) = $\boxed{}$

p_2(F 1 beobachtet a_L|F 2 beobachtet a_H nicht) = $\boxed{}$

d) Angenommen Firma 1 weiß, dass Firma 2 die Menge $q_{2H} \geq 0$ wählt, falls sie a_H beobachtet und dass sie die Menge $q_{2?} \geq 0$ wählt, falls sie a_H nicht beobachtet. Welches Maximierungsproblem löst Firma 1, falls sie a_L beobachtet? Wie lautet in diesem Fall die optimale Menge q_{1L} von Firma 1?

Aufgabe 4 zu Kapitel 4: dynamische Spiele unter unvollständiger Information

Betrachten Sie das folgende Signalisierungsspiel, in dem die Natur mit Wahrscheinlichkeit 1/3 den Sender-Typ t_1 und mit Wahrscheinlichkeit 2/3 den Sender-Typ t_2 auswählt. In den Auszahlungsvektoren steht die Auszahlung des Senders (=Spieler 1) jeweils an erster Stelle.



a) Wie lauten die besten Antworten des Empfängers (= Spieler 2) in der linken Informationsmenge bei beliebigen Beliefs $[p], [1-p]$ und in der rechten Informationsmenge bei beliebigen Beliefs $[q], [q-1]$?

$$BA_2(p|L) = \begin{cases} & \text{falls } p < \\ & \text{falls } p = \\ & \text{falls } p > \end{cases} \qquad BA_2(q|R) = \begin{cases} & \text{falls } q < \\ & \text{falls } q = \\ & \text{falls } q > \end{cases}$$

b) Welche Beliefs sind für gegebene reine Strategien des Senders vereinbar mit Forderung 3? Wenn alle oder keine Beliefs vereinbar sind, schreiben Sie bitte „alle“ bzw. „keine“ in das entsprechende Feld.

	$s(t_1) = L, s(t_2) = L$	$s(t_1) = L, s(t_2) = R$	$s(t_1) = R, s(t_2) = L$	$s(t_1) = R, s(t_2) = R$
p				
q				

c) Kann die Strategie $s(t_1) = L, s(t_2) = L$ des Senders Teil eines perfekten Bayesianischen Gleichgewichts sein? Warum (nicht)?

d) Bestimmen Sie alle perfekten Bayesianischen Gleichgewichte in reinen Strategien, in denen beide Sender-Typen das selbe Signal senden, also alle Pooling-Gleichgewichte. Vergessen Sie dabei nicht, die Beliefs des Empfängers anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 1

1 a)

Die Strategie u von Anna ist strikt dominiert, da die gemischte Stragetie $\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m$ einen höheren Nutzen als die Strategie u erzielt, egal welche Strategie Ben wählt:

$$\begin{aligned}
u_A\left(\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m, L\right) &= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2} &>& \quad 3 = u_A(u, L)\\
u_A\left(\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m, M\right) &= \frac{1}{2}7 + \frac{1}{2}0 = \frac{7}{2} &>& \quad 3 = u_A(u, M)\\
u_A\left(\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m, R\right) &= \frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}6 = 6 &>& \quad 5 = u_A(u, R)
\end{aligned}$$

1 b)

$$\begin{aligned}
EU_B((p, 1-p, 0), L) &= 4 \cdot p + 0 \cdot (1-p) &= 4p\\
EU_B((p, 1-p, 0), M) &= 0 \cdot p + 4 \cdot (1-p) &= 4 - 4p\\
EU_B((p, 1-p, 0), R) &= 3 \cdot p + 3 \cdot (1-p) &= 3
\end{aligned}$$

1 c)

$$\text{Beste Antwort/en von Ben auf } (p_o, p_m, p_u) = (p, 1-p, 0) = \begin{cases} \{M\} & \text{falls } p < \frac{1}{4} \\ \{M, R\} & \text{falls } p = \frac{1}{4} \\ \{R\} & \text{falls } \frac{1}{4} < p < \frac{3}{4} \\ \{L, R\} & \text{falls } p = \frac{3}{4} \\ \{L\} & \text{falls } p > \frac{3}{4} \end{cases}$$

1 d)

Alle Paare von Strategien $((p, 1-p, 0), R)$ mit $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$ sind Nash Gleichgewichte.

(Anna spielt o mit Wahrscheinlichkeit p und m mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ und Ben spielt R.)

Lösung zu Aufgabe 2

2 a)

Spieler 3 hat sechs reine Strategien: $\{l'l, l'm, l'r, r'l, r'm, r'r\}$

2 b)

Das Spiel hat vier Teilspiele. Da dieses Spiel keine Informationsmengen besitzt, beginnt in jedem der vier Entscheidungsknoten genau ein Teilspiel.

2 c)

Spieler 3 spielt $r'l$, Spieler 2 spielt L und Spieler 1 spielt D.

2 d)

Zum Beispiel: Spieler 3 spielt $r'm$ (nicht teilspielperfekt), Spieler 2 spielt L und Spieler 1 spielt D.

Lösung zu Aufgabe 3

3 a)

$$\begin{aligned}
max_{q_i \geq 0} \quad & \frac{1}{3}\left(a_H - q_i - q_j - c\right) q_i + \frac{1}{3}\left(a_M - q_i - q_j - c\right) q_i + \frac{1}{3}\left(a_L - q_i - q_j - c\right) q_i \\
= \quad & \left(\frac{1}{3}(a_H + a_L + a_M) - q_i - q_j - c\right) q_i \\
= \quad & \left(\frac{1}{3}(2\frac{a_H + a_L}{2} + a_M) - q_i - q_j - c\right) q_i \\
= \quad & \left(a_M - q_i - q_j - c\right) q_i
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Cournot-Lösung aus der Vorlesung: $q_i^C = \frac{a_M - c}{3}$

3 b)

	Firma 1 beobachtet a_L	Firma 1 beobachtet a_L nicht
a_H	0	$1/2$
a_M	0	$1/2$
a_L	1	0

Firma 2 ordnet a folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten zu:

	Firma 2 beobachtet a_H	Firma 2 beobachtet a_H nicht
a_H	1	0
a_M	0	1/2
a_L	0	1/2

3 c)

$$p_1(\text{F 2 beobachtet } a_H | \text{F 1 beobachtet } a_L) = \boxed{0}$$

$$p_1(\text{F 2 beobachtet } a_H | \text{F 1 beobachtet } a_L \text{ nicht}) = \boxed{1/2}$$

$$p_2(\text{F 1 beobachtet } a_L | \text{F 2 beobachtet } a_H) = \boxed{0}$$

$$p_2(\text{F 1 beobachtet } a_L | \text{F 2 beobachtet } a_H \text{ nicht}) = \boxed{1/2}$$

3 d)

$$\max_{q_1 \geq 0} \left(a_L - q_1 - q_{2?} - c\right) q_1 \Rightarrow q_1^* = \max\left\{\frac{a_L - c - q_{2?}}{2}, 0\right\}$$

Lösung zu Aufgabe 4

4 a)

$$BA_2(p|L) = \begin{cases} \{d\} & \text{falls } p < \frac{2}{3} \\ \{u, d\} & \text{falls } p = \frac{2}{3} \\ \{u\} & \text{falls } p > \frac{2}{3} \end{cases} \qquad BA_2(q|R) = \begin{cases} \{u\} & \text{falls } q < \frac{1}{2} \\ \{u\} & \text{falls } q = \frac{1}{2} \\ \{u\} & \text{falls } q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

4 b)

	$s(t_1) = L, s(t_2) = L$	$s(t_1) = L, s(t_2) = R$	$s(t_1) = R, s(t_2) = L$	$s(t_1) = R, s(t_2) = R$
p	1/3	1	0	alle
q	alle	0	1	1/3

4 c)

Nach 4 a) ist u optimal für den Empfänger, falls der Sender R spielt (unabhängig von den Beliefs $[q], [1-q]$). Der Sender mit dem Typ t_1 erwartet also nach R die Auszahlung 2. Dies ist größer als die Auszahlung 1, die der Sender mit dem Typ t_1 nach L erwartet (unabhängig von der Entscheidung des Empfängers). Deshalb erfüllt die reine Strategie LL nicht die Forderung 2 für den Sender und kann kein Teil eines pBGGWs sein.

4 d)

Es gibt zwei Poolingstrategien: LL und RR. Nach 4 c) kann LL kein pBGGW sein. Prüfe also RR:

Forderungen 1 & 3 Beliefs Nach 4 b): $p \in [0, 1]$ und $q = \frac{1}{3}$

Forderung 2 Empfänger Siehe 4 a).

Forderung 2 Sender t_1 Nach 4 c) ist R für den Sender mit t_1 optimal.

Forderung 2 Sender t_2 Der Sender erzielt mit R den Nutzen 1 (egal was der Empfänger macht).
Fall $p \leq \frac{2}{3}$ & Empfänger wählt d (nach 4 a): der Sender erzielt mit R den Nutzen $2 > 1 \rightarrow$ F2 verletzt.
Fall $p \geq \frac{2}{3}$ & Empfänger wählt u (nach 4 a): der Sender erzielt mit R den Nutzen $0 < 1 \rightarrow$ F2 erfüllt.

Menge aller perfekten Bayesianischen Gleichgewichte:

$$\left(RR, uu, p \geq \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}\right)$$