Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 28. September 2022

Bitte tragen Sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________

Studiengang ____________ Vorname ____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus vier Aufgaben, **von welchen drei zu bearbeiten sind.** Streichen Sie bitte eindeutig erkennbar diejenige Aufgabe, die nicht gewertet werden soll. Jede der Aufgaben besteht aus vier Teilaufgaben a) bis d), für welche je maximal acht Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 4 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 4 sind unabhängig voneinander lösbar. Werden alle diese vier Aufgaben bearbeitet, so werden nur die Aufgaben 1 bis 3 bewertet.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten Sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern. Sollte der Platz hierfür nicht ausreichen, ordnen Sie Ihre Angaben auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Bei 36 von maximal 90 erreichbaren Punkten ist die Klausur bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1						**Gesamtpunkte Aufgabe 1**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8
Aufgabe 2						**Gesamtpunkte Aufgabe 2**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8
Aufgabe 3						**Gesamtpunkte Aufgabe 3**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8
Aufgabe 4						**Gesamtpunkte Aufgabe 4**	/ 30
Punkte a)	/ 8	Punkte b)	/ 8	Punkte c)	/ 8	Punkte d)	/ 8

Gesamtpunkte / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1: Statische Spiele unter vollständiger Information

Betrachten Sie das folgende simultane zwei-Personen Spiel in Normalform (Anna wählt die Zeilen und Bob wählt die Spalten).

		Bob L	Bob C	Bob R
Anna	T	2 , 0	1 , 1	2 , 0
Anna	M	0 , 3	1 , 1	0 , 2
Anna	D	1 , 0	4 , 1	1 , 2

a) Streichen Sie in der obigen Auszahlungsmatrix alle (iteriert) strikt dominierten Strategien.

b) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

c) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien.

d) Warum kann Anna in einem gemischten Nash Gleichgewicht nicht alle ihrer reinen Strategien T, M, D mit positiver Wahrscheinlichkeit spielen?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) M wird strikt durch D dominiert:

			Bob	
		L	C	R
	T	2 , 0	1 , 1	2 , 0
Anna	~~M~~	~~0 , 3~~	~~1 , 1~~	~~0 , 2~~
	D	1 , 0	4 , 1	1 , 2

L wird strikt durch C dominiert:

			Bob	
		~~L~~	C	R
	T	~~2 , 0~~	1 , 1	2 , 0
Anna	~~M~~	~~0 , 3~~	~~1 , 1~~	~~0 , 2~~
	D	~~1 , 0~~	4 , 1	1 , 2

b) Nash-Gleichgewichte werden nicht durch das iterative Streichen von dominierten Strategien eliminiert:

			Bob	
		~~L~~	C	R
	T	~~2 , 0~~	1 , $\underline{1}$	$\underline{2}$, 0
Anna	~~M~~	~~0 , 3~~	~~1 , 1~~	~~0 , 2~~
	D	~~1 , 0~~	$\underline{4}$, 1	1 , $\underline{2}$

Es existieren keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

c) Ausgehend von der iterativ-eliminierten Auszahlungsmatrix: Sei $q \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass Bob C spielt und $1-q$ die Wahrscheinlichkeit, dass er R spielt. Sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass Anna T spielt und $1-p$ die Wahrscheinlichkeit, dass sie D spielt.

Damit Anna zwischen T und D gleichgestellt ist, muss gelten:

$$q \cdot 1 + (1-q) \cdot 2 = q \cdot 4 + (1-q) \cdot 1 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

Damit Bob zwischen C und R gleichgestellt ist, muss gelten:

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Das Gleichgewicht in gemischten Strategien lautet somit: ($\frac{1}{2}$·T $\frac{1}{2}$·D, $\frac{1}{4}$·C $\frac{3}{4}$·R)

d) Es ist immer irrational eine strikt dominierte Strategie wie z. B. M zu spielen.

Aufgabe 2 zu Kapitel 2: Dynamische Spiele unter vollständiger Information

Betrachten Sie das folgende simultane zwei-Personen Spiel in Normalform (Anna wählt die Zeilen, Bob wählt die Spalten).

		Bob: L	Bob: R
Anna	T	$1\ ,\ 1$	$-1\ ,\ 4$
	D	$4\ ,\ -1$	$0\ ,\ 0$

Nehmen Sie an, das Spiel werde zweimal hintereinander gespielt. Die Auszahlungen des zweistufigen Spiels seien durch die Summen der Stufenauszahlungen gegeben.

a) Nehmen Sie an, dass Anna und Bob in der zweiten Runde *nicht* wissen, welche Aktion der/die andere in der ersten Runde gewählt hat. Begründen Sie, warum Anna acht reine Strategien in diesem zweistufigen Spiel hat.

b) Nehmen Sie nun an, dass Anna und Bob nach der ersten Runde beobachten, welche Aktionen der/die andere in der ersten Runde gewählt hat. Daraufhin wählen sie wieder simultan ihre Aktionen in der zweiten Runde. Wie viele reine Strategien besitzen Anna und Bob nun?

Betrachten Sie für die Teile c) und d) das in Teil b) beschriebene Spiel.

c) Welche Paare von Aktionen aus $\{T, D\} \times \{L, R\}$ können in der zweiten Stufe des Spiels in einem teilspielperfekten Gleichgewicht in reinen Strategien gespielt werden?

d) Welches ist die höchste Auszahlung, die Anna in einem teilspielperfekten Nash Gleichgewicht in reinen Strategien erhalten kann? Wie lautet eine dazugehörige Strategienkombination? Achten Sie darauf, die Strategien vollständig, also auch außerhalb des Gleichgewichtspfades, anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Am Anfang der ersten Runde befindet Anna sich in der ersten Informationsmenge und kann entweder T oder D spielen. Ihre eigene Wahl kann sie beobachten Bobs Wahl nicht, es resultieren nach der ersten Runde also zwei Informationsmengen: {TL, TR}, {DL, DR}. In jeder dieser zwei Informationsmengen kann sie erneut eine von zwei Optionen wählen, nämlich T oder D. Zusammen verfügt sie also über drei Informationsmengen, in denen sie zwischen zwei Optionen wählen kann und somit über $2^3 = 8$ reine Strategien.

b) Anna verfügt über fünf Informationsmengen: Den Startknoten und die vier möglichen Ausgänge nach der ersten Runde TL, TR, DL und DR. In jeder dieser Mengen hat sie zwei Optionen und verfügt deshalb über $2^5 = 32$ reine Strategien.

c) In der zweiten und letzten Stufe können nur Nashgleichgewichte des Grundspiels gespielt werden - hier ausschließlich DR.

d) In der zweiten Stufe muss folglich in jeder der vier resultierenden Infomengen DR gespielt werden. Da kein anderes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien existiert, kann auch nicht im Zuge von Triggerstrategien in der ersten Stufe eine andere Kombination als DR erzwungen werden. Somit lautet das teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht (DDDDD,RRRRR).

Aufgabe 3 zu Kapitel 3: Statische Spiele unter unvollständiger Information

Anna und Bob spielen folgendes Spiel in Normalform:

		Bob: C	Bob: D
Anna	C	$3\ ,\ 1$	$0\ ,\ 0$
Anna	D	$0\ ,\ 0$	$1\ ,\ 3$

a) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte (in reinen und gemischten Strategien) dieses Spiels.

Nehmen Sie nun an, dass, bevor sich Anna und Bob für eine ihrer Strategien simultan entscheiden, sie beobachten, ob ihre Professorin eine Brille (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$) trägt, oder nicht (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$). All dies ist common knowledge.

b) Geben Sie die Menge der reinen Strategien von Anna und die Menge der reinen Strategien von Bob im Spiel mit Beobachtung der Professorin an.

c) Nehmen Sie an, dass Bob immer D wählt, wenn die Professorin eine Brille trägt, und C, falls die Professorin keine Brille trägt. Welche Strategie von Anna im Spiel mit Beobachtung der Professorin ist die beste Antwort darauf?

d) Geben Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien des Spiels mit Professorin an.

Lösung zu Aufgabe 3

a)

		Bob: C	Bob: D
Anna	C	$\underline{3}$, $\underline{1}$	0 , 0
	D	0 , 0	$\underline{1}$, $\underline{3}$

Die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien sind CC und DD.

Sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass Anna C spiele, und $q \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass Bob C spiele. Es gilt:

$$q \cdot 3 + (1-q) \cdot 0 = q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

Das gemischte Nash-Gleichgewicht lautet ($\frac{3}{4}$·C $\frac{1}{4}$·D, $\frac{1}{4}$·C $\frac{3}{4}$·D).

b) Für beide gleich: {C, D} x {C, D}

c) Annas beste Antwort besteht darin, immer dann D zu spielen, wenn die Professorin eine Brille trägt und immer dann C zu spielen, wenn sie keine trägt, um sich so mit Bob zu koordinieren.

d) Jedes Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien muss vorsehen, dass die beiden Spieler sich koordinieren: (CC, CC), (CD, CD), (DC, DC), (DD, DD)

Aufgabe 4 zu Kapitel 4: Dynamische Spiele unter unvollständiger Information

Gegeben sei folgendes Spiel zwischen Anna und Bob:

1. Zuerst entscheidet sich Anna zwischen den Alternativen O, M und U.
   - Wählt Anna die Alternative U, so endet das Spiel sofort und Anna und Bob erhalten beide die Auszahlung 0.
   - Wählt Anna eine der Alternativen O oder M, so ist Bob am Zug. Er kann O oder M aber nicht unterscheiden.
2. Als zweites zieht Bob, er entscheidet sich zwischen L und R. Danach endet das Spiel.
   - Entscheidet er sich für L nach O, so erhält Anna 6 und Bob -3.
   - Entscheidet er sich für R nach O, so erhalten Anna und Bob beide -6.
   - Entscheidet er sich für L nach M, so erhält Anna 3 und Bob -6.
   - Entscheidet er sich für R nach M, so erhält Anna -6 und Bob -3.

a) Stellen Sie das Spiel in Normalform dar und geben Sie eine Strategie von Anna an, welche durch eine andere (gemischte) Strategie von Anna dominiert wird. Nennen Sie ebenfalls die dominierende Strategie.

b) Bestimmen Sie alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

c) Stellen Sie das Spiel als Spielbaum dar. Benutzen Sie hierbei die Notation der Vorlesung.

d) Argumentieren Sie für eines der Nash Gleichgewichte aus b), warum Bob in der Spielbaumdarstellung Forderung 2 aus der Vorlesung nur dann erfüllen kann, wenn er glaubt, dass Anna eine dominierte Strategie spielt.

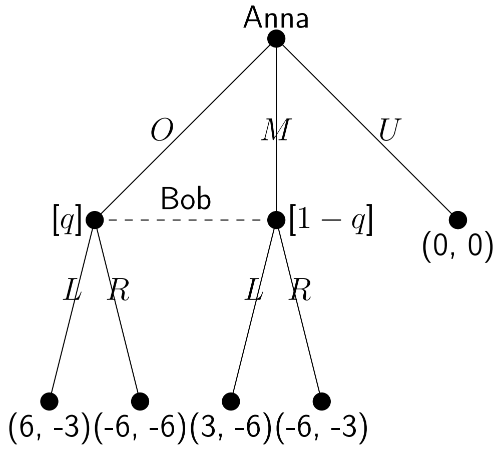
Lösung zu Aufgabe 4

a,b)

		Bob R	Bob L
Anna	O	$\underline{6}$, $\underline{-3}$	-6 , -6
Anna	M	3 , -6	-6 , $\underline{-3}$
Anna	U	0 , $\underline{0}$	$\underline{0}$, $\underline{0}$

Die Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien sind OR und UL. M wird strikt durch $(p\cdot$O, $(1-p)\cdot$U) mit $p > \frac{1}{2}$ dominiert, da sie für jede Wahl Bobs eine höhere Auszahlung verspricht als M.

c)



d) Damit das Nash-Gleichgewicht UR die Forderung 2 erfüllt, muss dieses sequentiell rational sein, es also für Bob gegeben den Belief q rational sein, R anstatt L zu spielen. Das ist offenkundig nur dann gegeben, wenn Bob glaubt, dass Anna mit einer gewissen positiven Wahrscheinlichkeit die dominierte Strategie M spielt, da im linken Teilbaum L eine höhere Auszahlung als R verspricht (vgl. Aufgabe 21 der Übung unter `https://www.youtube.com/watch?v=mhSsbc-0Ues&ab_channel=LarsMetzger`).