Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 20. März 2026

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	Nachname	__________
Studiengang	__________	Vorname	__________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus zwei Aufgaben, welche unabhängig von einander lösbar sind.

Jede der Aufgaben besteht aus fünf Teilaufgaben a) bis e), für welche je maximal neun Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben sind demnach maximal 45 Punkte zu erreichen.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern oder auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten. Ordnen sie ihre Angaben bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1			**Gesamtpunkte Aufgabe 1**		☐ / 30
Punkte a) ☐ / 9	b) ☐ / 9	c) ☐ / 9	d) ☐ / 9	e) ☐ / 9	
Aufgabe 2			**Gesamtpunkte Aufgabe 2**		☐ / 30
Punkte a) ☐ / 9	b) ☐ / 9	c) ☐ / 9	d) ☐ / 9	e) ☐ / 9	

Gesamtpunkte ☐ / 90 **Note:**

Aufgabe 1 zu Kapitel 1:
Statische Spiele unter vollständiger Information

Gegeben sei folgendes Spiel in Normalform für $x > 4$:

		(2)		
		t_1	t_2	t_3
	s_1	1 , 2	1 , 0	x , 0
(1)	s_2	0 , 2	2 , 3	0 , 0
	s_3	0 , x	0 , 0	4 , 4

a) Gibt es in diesem Spiel dominierte Strategien? Falls ja, benennen sie die dominierte und die dominierende Strategie. Ist die Dominanz strikt oder schwach?

b) Markieren sie in der Auszahlungsmatrix die besten Antworten der Spieler:innen.
Gibt es Nash Gleichgewichte in reinen Strategien? Nennen sie diese und begründen sie dies.

c) Betrachten sie die gemischte Strategie (q_1, q_2, q_3) von (2).
Wie lautet der Erwartungsnutzen von (1), wenn diese:r die gemischte Strategie (p_1, p_2, p_3) wählt?
Wie lauten die besten Antworten von (1) auf beliebige gemischte Strategien (q_1, q_2, q_3) von (2)?

d) Betrachten sie die gemischte Strategie (p_1, p_2, p_3) von (1).
Wie lautet der Erwartungsnutzen von (2), wenn diese:r die gemischte Strategie (q_1, q_2, q_3) wählt?
Wie lauten die besten Antworten von (2) auf beliebige gemischte Strategien (p_1, p_2, p_3) von (1)?

e) Berechnen sie alle Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien!
Berechnen sie zudem den gleichgewichtigen Erwartungsnutzen der Spieler:innen.

Aufgabe 2 zu Kapitel 2: Dynamische Spiele unter vollständiger Information

Gegeben sei wie in Aufgabe 1 folgendes Stufenspiel G für $x > 4$:

(1) \ (2)	t_1	t_2	t_3
s_1	1 , 2	1 , 0	x , 0
s_2	0 , 2	2 , 3	0 , 0
s_3	0 , x	0 , 0	4 , 4

Nachdem (1) und (2) dieses Stufenspiel einmal spielen, beobachten sie beide die Entscheidungen des/der jeweils anderen Person und spielen das Stufenspiel erneut. Die Auszahlungen des gesamten Spiels seien die Summen der Auszahlungen der beiden Stufenspiele. Das gesamte Spiel heiße $G(2)$.

a) Geben sie die Mengen aller reinen Strategien für (1) und (2) im Spiel $G(2)$ an. Sie können diese Menge als Kartesisches Produkt angeben. Wie viele Profile von reinen Strategien gibt es? Sie können diese Zahl als Potenz angeben.

b) Geben sie ein Profil von Strategien für $G(2)$ an, für welches (1) den Nutzen 6 und (2) den Nutzen 7 erzielt. Achten sie dabei darauf, die Strategien vollständig anzugeben.

c) Es sei $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ ein reines teilspielperfektes Nash Gleichgewicht von $G(2)$. Welche Paare von Aktionen sind unter diesem Profil in Stufe 2 möglich?

d) Geben sie ein konkretes teilspielperfektes Nash Gleichgewicht von $G(2)$ an.

e) Für welche Werte von $x > 4$ ist ein teilspielperfektes Nash Gleichgewicht möglich, in welchen in der ersten Stufe (s_3, t_3) gespielt wird?

Lösung zu Aufgabe 1

a)

Die Strategie s_3 ist strikt durch die Strategie s_1 dominiert. Die Strategie t_3 ist strikt durch die Strategie t_1 dominiert.

b)

		(2) t_1	t_2	t_3
(1)	s_1	$\underline{1}$, $\underline{2}$	1 , 0	$\underline{x}$, 0
	s_2	0 , 2	$\underline{2}$, $\underline{3}$	0 , 0
	s_3	0 , $\underline{x}$	0 , 0	4 , 4

Nash Gleichgewichte: (s_1, t_1) und (s_2, t_2).

c)

$$\begin{aligned} U_1(s_1, q) &= 1 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + x \cdot q_3 \\ U_1(s_2, q) &= 2 \cdot q_2 \\ U_1(s_3, q) &= 4 \cdot q_3 \\ U_1(p, q) &= p_1 q_1 + p_1 q_2 + x p_1 q_3 + 2 p_2 q_2 + 4 p_3 q_3 \end{aligned}$$

Vorüberlegung: s_3 strikt dominiert, daher $p_3 = 0$. Daher $(p_1, p_2, 0) = (p, 1-p, 0)$ darstellbar.

$$U_1(s_1, q) > U_1(s_2, q) \Leftrightarrow q_1 + q_2 + xq_3 > 2q_2 \Leftrightarrow q_1 + xq_3 > q_2$$

$$p^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q_1 + xq_3 > q_2 \\ [0,1] & \text{falls } q_1 + xq_3 = q_2 \\ 0 & \text{falls } q_1 + xq_3 < q_2 \end{cases}$$

d)

$$\begin{aligned} U_2(p, t_1) &= 2p_1 + 2p_2 + xp_3 \\ U_2(p, t_2) &= 3p_2 \\ U_2(p, t_3) &= 4p_3 \\ U_2(p, q) &= q_1(2p_1 + 2p_2 + xp_3) + 3q_2 p_2 + 4q_3 p_3 \end{aligned}$$

Vorüberlegung: s_3 strikt dominiert, daher $q_3 = 0$ und $(q_1, q_2, 0) = (q, 1-q, 0)$ darstellbar.

$$U_2(p, t_1) > U_2(p, t_2) \Leftrightarrow 2p_1 + 2p_2 + xp_3 > 3p_2 \Leftrightarrow 2p_1 + xp_3 > p_2$$

$$q^*(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2p_1 + xp_3 > p_2 \\ [0,1] & \text{falls } 2p_1 + xp_3 = p_2 \\ 0 & \text{falls } 2p_1 + xp_3 < p_2 \end{cases}$$

e)

Es muss $q_3 = 0$ und $U_1(s_1, q) = U_1(s_2, q)$ gelten, also $q_1 = q_2$. Demnach: $q^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Es muss $p_3 = 0$ und $U_2(p, t_1) = U_2(p, t_2)$ gelten, also $2p_1 = p_2$. Demnach: $p^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0))$.

Also:

$$\begin{aligned} U_1(p^*, q^*) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\frac{1}{2} = 1 \\ U_2(p^*, q^*) &= \frac{1}{2}(2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}) + 3\frac{1}{2}\frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a)

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3\} \times \{s_1, s_2, s_3\}^9 = \{s_1, s_2, s_3\}^{10}$$

$$T_1 = \{t_1, t_2, t_3\} \times \{t_1, t_2, t_3\}^9 = \{t_1, t_2, t_3\}^{10}$$

Es gibt $|S_1| = 3^{10}$ reine Strategien von (1) und 3^{10} reine Strategien von (2). Daher gibt es $3^{10} \cdot 3^{10} = 3^{20}$ oder 9^{10} Profile von reinen Strategien.

b)

$$(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = (s_2s_3s_3s_3s_3s_3s_3s_3s_3s_3, t_2t_3t_3t_3t_3t_3t_3t_3t_3t_3)$$

(In Stufe 1 wird (s_2, t_2) und in Stufe 2 wird (s_3, t_3) gespielt – unabhängig vom Spielausgang von Stufe 1.)

c) Da in jedem Teilspiel ein Nash Gleichgewicht gespielt werden muss, muss in Stufe 2 entweder (s_1, t_1) oder (s_2, t_2) gespielt werden. Dies sind die einzigen reinen Nash Gleichgewichte des Stufenspiels.

d) „Immer (s_1, t_1)": $(s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1, t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1)$
oder „Immer (s_2, t_2)": $(s_2s_2s_2s_2s_2s_2s_2s_2s_2s_2, t_2t_2t_2t_2t_2t_2t_2t_2t_2t_2)$
oder „manchmal (s_1, t_1) und manchmal (s_2, t_2)": $(s_1s_1s_2s_1s_1s_2s_1s_1s_2s_2, t_1t_1t_2t_1t_1t_2t_1t_1t_2t_2)$

e) Vorschlag:

$$(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = (s_3s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_2, t_3t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_2)$$

Hier wird in der ersten Stufe (s_3, t_3) gespielt. Falls dies tatsächlich passiert, spielen die Spieler in der zweiten Stufe das gute Nash Gleichgewicht (s_2, t_2), andernfalls das schlechte Nash Gleichgewicht (s_1, t_1). Die Auszahlungen für dieses Profil von Strategien lauten $(4, 4) + (2, 3) = (6, 7)$.

Eine Abweichung von (2):

$$\tilde{\mathcal{T}} = t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_2$$

Diese Abweichung führt zu der Auszahlung $x + 2$. Es muss also gelten, dass $x + 2 \leq 7 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Für (1) führt die Abweichung $\tilde{\mathcal{S}} = s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_2$ zur Auszahlung $x + 1 \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Wir können also

$$(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = (s_3s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_1s_2, t_3t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_1t_2)$$

als reines teilspielperfektes Nash Gleichgewicht stützen, falls $x \in (4, 5]$.