

# Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

11. Februar 2026

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer

Nachname

Studiengang

Vorname

## Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus zwei Aufgaben, welche unabhängig von einander lösbar sind.

Jede der Aufgaben besteht aus fünf Teilaufgaben a) bis e), für welche je maximal neun Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben sind demnach maximal 45 Punkte zu erreichen.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern oder auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten. Ordnen sie ihre Angaben bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

**Viel Erfolg!**

Vom Prüfer auszufüllen:

|                                                                                                                                                            |                               |                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| <b>Aufgabe 1</b>                                                                                                                                           | <b>Gesamtpunkte Aufgabe 1</b> | <input type="text"/> / 30 |
| Punkte a) <input type="text"/> / 9   b) <input type="text"/> / 9   c) <input type="text"/> / 9   d) <input type="text"/> / 9   e) <input type="text"/> / 9 |                               |                           |
| <b>Aufgabe 2</b>                                                                                                                                           | <b>Gesamtpunkte Aufgabe 2</b> | <input type="text"/> / 30 |
| Punkte a) <input type="text"/> / 9   b) <input type="text"/> / 9   c) <input type="text"/> / 9   d) <input type="text"/> / 9   e) <input type="text"/> / 9 |                               |                           |
| <b>Gesamtpunkte</b> <input type="text"/> / 90                                                                                                              | <b>Note:</b>                  |                           |

# Aufgabe 1 zu Kapitel 1:

## Statische Spiele unter vollständiger Information

Gegeben sei folgendes Spiel in Normalform:

|     |       |        |        |         |        |
|-----|-------|--------|--------|---------|--------|
|     |       | (2)    |        |         |        |
|     |       | $t_1$  | $t_2$  | $t_3$   | $t_4$  |
| (1) | $s_1$ | -2 , 9 | -3 , 3 | -1 , 6  | 9 , 5  |
|     | $s_2$ | 1 , 7  | 4 , 4  | -2 , 8  | -4 , 7 |
|     | $s_3$ | -2 , 4 | -4 , 6 | 0 , 4   | -1 , 4 |
|     | $s_4$ | -2 , 9 | -3 , 0 | -1 , -2 | -2 , 9 |

a) Markieren sie in der Auszahlungsmatrix die besten Antworten der Spieler:innen.

Gibt es ein Nash Gleichgewicht in reinen Strategien? Warum (nicht)?

b) Betrachten sie die gemischte Strategie  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  von (2).

Wie lautet der Erwartungsnutzen von (1), wenn diese:r die gemischte Strategie  $(0, p, 1 - p, 0)$  wählt?

Gibt es eine reine Strategie von (1), welche durch eine gemischte Strategie dieser Art dominiert wird?

c) Betrachten sie die gemischte Strategie  $(p_1, p_2, p_3, 0)$  von (1).

Wie lautet der Erwartungsnutzen von (2), wenn diese:r die gemischte Strategie  $(0, q, 1 - q, 0)$  wählt?

Gibt es eine reine Strategie von (2), welche durch eine gemischte Strategie dieser Art dominiert wird?

d) Streichen sie alle iteriert strikt dominierte Strategien. Begründen sie dabei jeden Schritt.

*Hinweis: Für jede:n Spieler:in überleben zwei reine Strategien diesen Prozess.*

e) Wie lautet das einzige Nash Gleichgewicht des Spiels?

## Aufgabe 2 zu Kapitel 2:

### Dynamische Spiele unter vollständiger Information

Betrachten sie folgendes zweistufiges Spiel mit zwei Firmen (1) & (2):

In der ersten Stufe entscheiden beide Firmen simultan über Investitionen  $I_1 \geq 0$  und  $I_2 \geq 0$  in Forschung und Entwicklung. Die Forschung von Firma  $i = 1, 2$  ist mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{I_i}{I_1 + I_2}$  erfolgreich. Ist die eine Firma erfolgreich, so erfährt die jeweils andere Firma mit Wahrscheinlichkeit 50% von den Forschungsergebnissen und kann diese ebenso nutzen.

Nach der ersten Stufe erfahren beide Firmen, welche Firma die Forschungsergebnisse nutzen kann (die Forschung also entweder selbst erfolgreich durchgeführt hat oder von der erfolgreichen Forschung der anderen Firma profitiert).

In Stufe 2 stehen die beiden Firmen im Mengenwettbewerb und wählen gleichzeitig die Mengen  $q_1, q_2 \geq 0$ .

Für zwei Mengen  $q_1, q_2$  mit  $q_1 + q_2 > 0$  lautet der am Markt erzielte Preis  $P(q_1, q_2) = \frac{9}{q_1 + q_2}$ . Für  $q_1 + q_2 = 0$  gelte  $P(q_1, q_2) \cdot q_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Die Kostenfunktion von Firma  $i$  lautet  $c_i(q_i) = \gamma_i \cdot q_i$ , wobei  $\gamma_i = 2$ , wenn der Firma keine Forschungsergebnisse vorliegen und  $\gamma_i = 1$ , falls der Firma Forschungsergebnisse vorliegen.

Falls  $q_1 + q_2 > 0$  und Firma  $i$  die Forschungsergebnisse nutzen kann, lautet ihr Gewinn:

$$\pi_i^L(I_1, I_2, q_1, q_2) = \frac{9}{q_1 + q_2} q_i - q_i - I_i$$

Falls  $q_1 + q_2 > 0$  und Firma  $i$  die Forschungsergebnisse nicht nutzen kann, lautet ihr Gewinn:

$$\pi_i^H(I_1, I_2, q_1, q_2) = \frac{9}{q_1 + q_2} q_i - 2q_i - I_i$$

Falls  $q_1 + q_2 = 0$  lautet der Gewinn von Firma  $i$   $\pi_i(I_1, I_2, q_1, q_2) = -I_i$ .

a) Zeichnen sie das Spiel als Spielbaum bis zum Beginn von Stufe 2, wobei sie für Zufallszüge Spieler:in 0 heranziehen.

b) Wie lauten die gleichgewichtigen Mengen und Gewinne in den Teilspielen, in welchen beide Firmen auf dem gleichen Forschungsstand sind?

c) Wie lauten die gleichgewichtigen Mengen und Gewinne in den Teilspielen, in welchen0 beide Firmen auf einem unterschiedlichen Forschungsstand sind?

d) Formulieren sie die Maximierungsprobleme der Firmen in Stufe 1 und bestimmen sie die Bedingungen 1. Ordnung.

Wie hoch sind Investitionen in Forschung und Entwicklung,  $I_1$  und  $I_2$ , der beiden Firmen im eindeuten teilspiel-perfekten Nash Gleichgewicht?

e) Betrachten sie nun den Fall, dass nach der ersten Stufe die unerfolgreiche Firma die Forschungsergebnisse nicht erfahren würde. Sie erfahre aber nach wie vor, dass die andere Firma einen Forschungserfolg hat. Wie lautet nun das Maximierungsproblem und die gleichgewichtige Forschungsinvestition?















# Lösung zu Aufgabe 1

a)

(2)

|       | $t_1$         | $t_2$         | $t_3$         | $t_4$         |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $s_1$ | -2 , <u>9</u> | -3 , 3        | -1 , 6        | <u>9</u> , 5  |
| $s_2$ | <u>1</u> , 7  | <u>4</u> , 4  | -2 , <u>8</u> | -4 , 7        |
| $s_3$ | -2 , 4        | -4 , <u>6</u> | <u>0</u> , 4  | -1 , 4        |
| $s_4$ | -2 , <u>9</u> | -3 , 0        | -1 , -2       | -2 , <u>9</u> |

(1)

Es gibt kein Nash Gleichgewicht in reinen Strategien.

b)

$$\begin{aligned}
 U_1(s_1, q) &= -2q_1 - 3q_2 - q_3 + 9q_4 \\
 U_1(s_2, q) &= q_1 + 4q_2 - 2q_3 - 4q_4 \\
 U_1(s_3, q) &= -2q_1 - 4q_2 - q_4 \\
 U_1(s_4, q) &= -2q_1 - 3q_2 - q_3 - 2q_4 \\
 U_1(p, q) &= q_1(p - 2(1 - p)) + q_2(4p - 4(1 - p)) - q_3 2p - q_4(4p + 1 - p) \\
 &= q_1(3p - 2) + q_2(8p - 4) + q_3(-2p) + q_4(-1 - 3p)
 \end{aligned}$$

$s_1$  dominiert  $s_4$  schwach, daher sollte eher  $s_4$  geprüft werden als  $s_1$ .

$s_4$  ist durch  $p$  strikt dominiert, falls:

- $-2 < 3p - 2 \Leftrightarrow p > 0 \checkmark$
- $-3 < 8p - 4 \Leftrightarrow p > \frac{1}{8}$
- $-1 < -2p \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$
- $-2 < -1 - 3p \Leftrightarrow p < \frac{1}{3}$

Demnach ist  $s_4$  durch  $p$  strikt dominiert, falls  $\frac{1}{8} < p < \frac{1}{3}$ .

c) Betrachte die gemischte Strategie  $(0, q, 1 - q, 0)$  für (2) unter der Voraussetzung, dass  $s_4$  gestrichen ist, (1) also die gemischte Strategie  $(p_1, p_2, p_3, 0)$  spielt:

$$\begin{aligned}
 U_2(p, t_1) &= 9p_1 + 7p_2 + 4p_3 \\
 U_2(p, t_2) &= 3p_1 + 4p_2 + 6p_3 \\
 U_2(p, t_3) &= 6p_1 + 8p_2 + 4p_3 \\
 U_2(p, t_4) &= 5p_1 + 7p_2 + 4p_3 \\
 U_2(p, q) &= p_1(3q + 6(1 - q)) + p_2(4q + 8(1 - q)) + p_3(6q + 4(1 - q)) \\
 &= p_1(6 - 3q) + p_2(8 - 4q) + p_3(4 + 2q)
 \end{aligned}$$

$t_1$  dominiert  $t_4$  schwach, daher sollte eher  $t_4$  geprüft werden als  $t_1$ .

$t_4$  ist iteriert strikt durch  $(0, q, 1 - q, 0)$  dominiert, falls

- $5 < 6 - 3q \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$
- $7 < 8 - 4q \Leftrightarrow q < \frac{1}{4}$

- $4 < 4 + 2q \Leftrightarrow q > 0$

Demnach ist  $t_4$  iteriert strikt durch  $(0, q, 1 - q, 0)$  dominiert, falls  $0 < q < \frac{1}{4}$ .

d) Falls  $t_4$  nicht gespielt wird, ist  $s_1$  analog zu  $s_4$  iteriert strikt durch  $(0, p, 1 - p, 0)$  dominiert, falls  $\frac{1}{8} < p < \frac{1}{3}$ .

Falls  $s_1$  und  $s_4$  nicht gespielt wird ist  $t_1$  analog zu  $t_4$  iteriert strikt durch  $(0, q, 1 - q, 0)$  dominiert, falls  $0 < q < \frac{1}{4}$ .

e) Nach iterierter Elimination strikt dominierter Strategien bleiben also nur die Strategien  $s_2$  und  $s_3$  für (1) und  $t_2$  und  $t_3$  für (2) übrig. Alle anderen Strategien können nicht Teil eines Nash Gleichgewichtes sein.

Wir suchen nun ein Paar gemischter Strategien  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  mit  $\mathbf{p} = (0, p, 1 - p, 0)$  und  $\mathbf{q} = (0, q, 1 - q, 0)$ , sodass

$$U_1(s_2, \mathbf{q}) = U_1(s_3, \mathbf{q}) \text{ und } U_2(\mathbf{p}, t_2) = U_2(\mathbf{p}, t_3)$$

Aus den Vorberechnungen folgt:

$$4q - 2(1 - q) = -4q \Leftrightarrow 10q = 2 \Leftrightarrow q = \frac{1}{5}$$

und

$$4p + 6(1 - p) = 8p + 4(1 - p) \Leftrightarrow -6p = -2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$$

Für diese gemischten Strategien gilt:

$$U_1(s_1, q) = -7/5$$

$$U_1(s_2, q) = -4/5$$

$$U_1(s_3, q) = -4/5$$

$$U_1(s_4, q) = -7/5$$

und

$$U_2(p, t_1) = 15/3$$

$$U_2(p, t_2) = 16/3$$

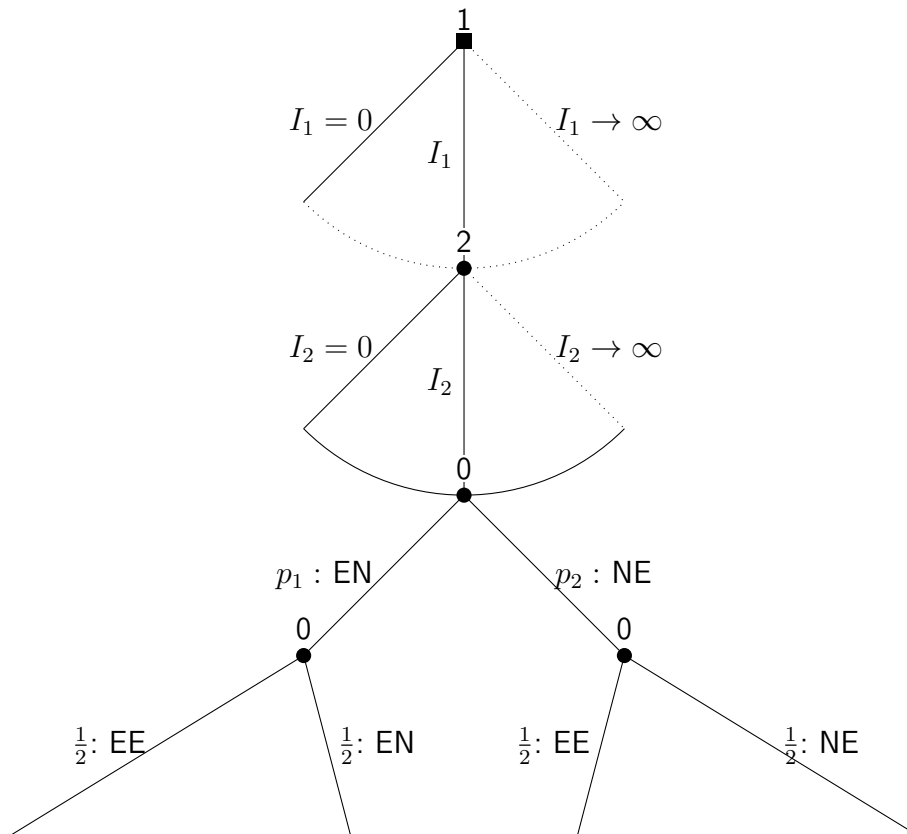
$$U_2(p, t_3) = 16/3$$

$$U_2(p, t_4) = 15/3$$

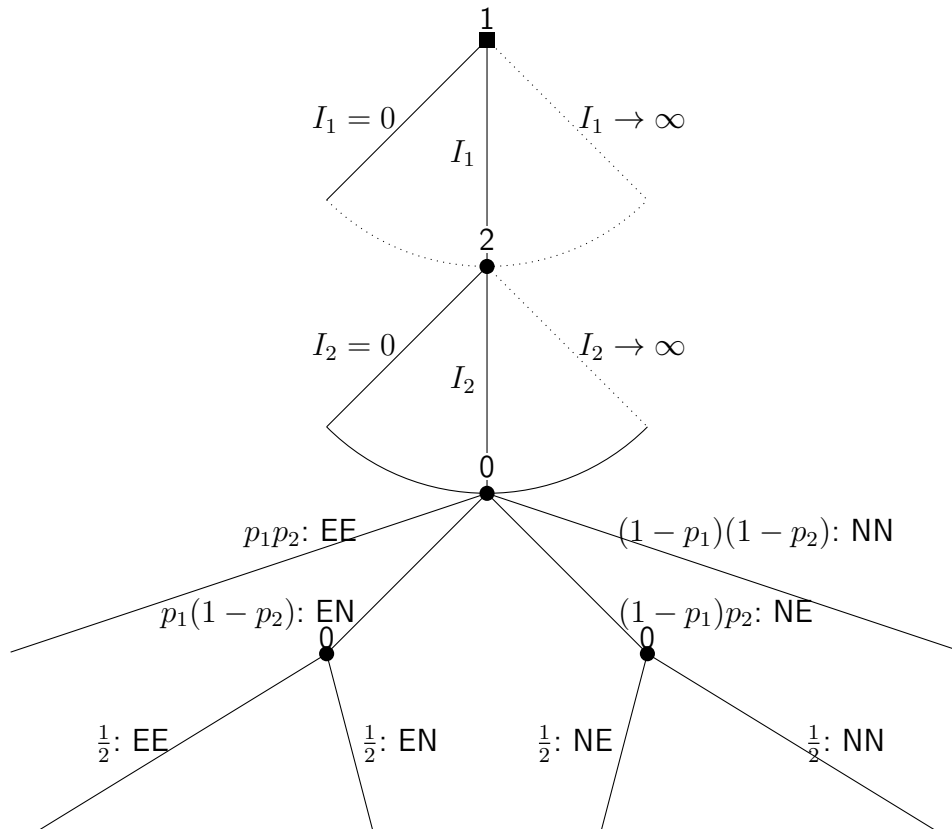
Das einzige Nash Gleichgewicht des Spiels lautet  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ((0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0), (0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0))$ .

# Lösung zu Aufgabe 2

a) Variante 1



a) Variante 2



In beiden Varianten bedeutet:

- $p_i = \frac{I_i}{I_1 + I_2}$
- EE: beide Firmen können den Forschungserfolg nutzen

- EN: Nur Firma 1 kann den Forschungserfolg nutzen
- NE: Nur Firma 2 kann den Forschungserfolg nutzen
- NN: keine kann den Forschungserfolg nutzen

b) Beide haben den gleichen Kostenparameter  $\gamma$ :

$$\max_{q_i \geq 0} \frac{9}{q_1 + q_2} q_i - \gamma q_i - I_i$$

Bedingung erster Ordnung für Firma  $i$ :

$$9 \frac{q_j}{(q_1 + q_2)^2} - \gamma \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } q_i > 0)$$

Falls  $q_1, q_2 > 0$ :

$$\begin{aligned} 9q_1 &= \gamma(q_1 + q_2)^2 = 9q_2 \Rightarrow q_1 = q_2 = q \\ \Rightarrow 9q &= \gamma 4q^2 \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{9}{4\gamma} \\ \Rightarrow \pi_i(q_1^*, q_2^*) &= \frac{9}{\frac{9}{4\gamma} + \frac{9}{4\gamma}} \frac{9}{4\gamma} - \gamma \frac{9}{4\gamma} - I_i = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - I_i = \frac{9}{4} - I_i \end{aligned}$$

c) Sei Firma 1 die erfolgreiche Firma mit  $\gamma_1 = 1$  und Firma 2 die unerfolgreiche Firma mit  $\gamma_2 = 2$ . Dann sind die Maximierungsprobleme wie folgt:

$$\max_{q_1 \geq 0} \frac{9}{q_1 + q_2} q_1 - q_1 - I_1$$

und

$$\max_{q_2 \geq 0} \frac{9}{q_1 + q_2} q_2 - 2q_2 - I_2$$

Die Bedingungen 1. Ordnung lauten:

$$9 \frac{q_2}{(q_1 + q_2)^2} - 1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } q_1 > 0)$$

$$9 \frac{q_1}{(q_1 + q_2)^2} - 2 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } q_2 > 0)$$

Falls  $q_1, q_2 > 0$  gilt

$$9q_2 = (q_1 + q_2)^2 = \frac{9}{2} q_1,$$

also  $q_1 = 2q_2$  und es folgt

$$9q_2 = (2q_2 + q_2)^2 = 9q_2^2 \Rightarrow q_2^* = 1, q_1^* = 2$$

Die Gewinne betragen

$$\pi_1(2, 1) = 9 \frac{2}{3} - 2 - I_1 = 4 - I_1$$

und

$$\pi_2(2, 1) = 9 \frac{1}{3} - 2 - I_2 = 1 - I_2$$

Die Ergebnisse gelten umgekehrt für vertauschte Rollen.

d) Variante 1

Maximierungsproblem:

$$\max_{I_1 \geq 0} \frac{I_1}{I_1 + I_2} \left( \frac{1}{2} 4 + \frac{1}{2} 9 \right) + \frac{I_2}{I_1 + I_2} \left( \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 9 \right) - I_1$$

$$= \max_{I_1 \geq 0} \frac{I_1}{I_1 + I_2} \frac{25}{8} + \frac{I_2}{I_1 + I_2} \frac{13}{8} - I_1$$

Analog für Firma 2.

Bedingung 1. Ordnung:

$$\frac{I_2}{(I_1 + I_2)^2} \frac{25}{8} - \frac{I_2}{(I_1 + I_2)^2} \frac{13}{8} - 1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } I_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 3I_2 \leq 2(I_1 + I_2)^2 \quad (= \text{ falls } I_1 > 0)$$

$I_1, I_2 > 0$ :

$$I_1 = I_2 = I \Rightarrow 3I = 8I^2 \Rightarrow I_1^* = I_2^* = \frac{3}{8}$$

d) Variante 2

Zielfunktion (mit  $p_i = \frac{I_i}{I_1 + I_2}$ ):

$$\begin{aligned} \pi_1(I_1, I_2) &= \frac{9}{4} \left[ p_1 p_2 + p_1(1 - p_2) \frac{1}{2} + (1 - p_1) p_2 \frac{1}{2} + (1 - p_1)(1 - p_2) \right] + p_1(1 - p_2) \frac{1}{2} 4 + (1 - p_1) p_2 \frac{1}{2} - I_1 \\ &\dots \text{ mit } p_2 = 1 - p_1 \text{ bzw. } 1 - p_2 = p_1 \\ &= \frac{13}{8} + \frac{5}{4} p_1 + \frac{1}{4} p_1^2 - I_1 \end{aligned}$$

BEO:

$$\frac{5}{4} p_1' + \frac{1}{2} p_1 p_1' - 1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } I_1 > 0)$$

Symmetrie:  $I_1 = I_2 = I > 0 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{5}{4} \frac{I}{(I + I)^2} + \frac{1}{4} \frac{I}{(I + I)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \frac{1}{4I} = 1 \Leftrightarrow I = \frac{3}{8}$$

e) Variante 1

Maximierungsproblem:

$$\max_{I_1 \geq 0} \frac{I_1}{I_1 + I_2} 4 + \frac{I_2}{I_1 + I_2} - I_1$$

Analog für Firma 2.

Bedingung 1. Ordnung:

$$\frac{I_2}{(I_1 + I_2)^2} 4 - \frac{I_2}{(I_1 + I_2)^2} - 1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } I_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow I_2 \leq \frac{1}{3} (I_1 + I_2)^2 \quad (= \text{ falls } I_1 > 0)$$

$I_1, I_2 > 0$ :

$$I_1 = I_2 = I \Rightarrow I = \frac{4}{3} I^2 \Rightarrow I_1^* = I_2^* = \frac{3}{4}$$

e) Variante 2

Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \pi_1(I_1, I_2) &= (p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)) \frac{9}{4} + p_1(1 - p_2) 4 + (1 - p_1) p_2 - I_1 \\ &\dots \\ &= p_1 \frac{5}{2} + \frac{1}{2} p_1^2 + 1 - I_1 \end{aligned}$$

BEO:

$$\frac{I_2}{(I_1 + I_2)^2} \frac{5}{2} + p_1 \frac{I_2}{(I_1 + I_2)^2} - 1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } I_1 > 0)$$

Symmetrie:  $I_1 = I_2 =: I > 0$

$$\frac{I}{4I^2} \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \frac{I}{4I^2} = 1 \Leftrightarrow I = \frac{3}{4}$$