

Klausur zu Einführung in die Spieltheorie (Bachelor)

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

22. September 2025

Bitte tragen sie Ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer

Nachname

Studiengang

Vorname

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus drei Aufgaben, jede der Aufgaben besteht aus sechs Teilaufgaben a) bis f), für welche je maximal fünf Punkte zu erreichen sind. Bei jeder der Aufgaben 1 bis 3 sind maximal 30 Punkte zu erreichen. Die Aufgaben 1 bis 3 sind unabhängig voneinander lösbar.

Bitte verwenden Sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift. Beantworten Sie die Aufgaben bitte direkt auf den Aufgabenblättern oder auf den hierfür vorgesehenen leeren Seiten. Ordnen Sie ihre Angaben bitte eindeutig erkennbar einer der Teilaufgaben zu.

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere keine Taschenrechner).

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe 1	Gesamtpunkte Aufgabe 1	/ 30
Punkte a) / 5 b) / 5 c) / 5 d) / 5 e) / 5 f) / 5		
Aufgabe 2	Gesamtpunkte Aufgabe 2	/ 30
Punkte a) / 5 b) / 5 c) / 5 d) / 5 e) / 5 f) / 5		
Aufgabe 3	Gesamtpunkte Aufgabe 3	/ 30
Punkte a) / 5 b) / 5 c) / 5 d) / 5 e) / 5 f) / 5		
Gesamtpunkte	/ 90	Note:

Aufgabe 1 zu Kapitel 1:

Statische Spiele unter vollständiger Information

Ein Spiel in Normalform habe folgende Auszahlungsmatrix:

	A	B	C
A	1 , 1	b , c	5 , 0
B	c , b	0 , 0	2 , -1
C	0 , 5	-1 , 2	3 , 3

Es seien $b, c \in \mathbb{R}$.

- Welche Ungleichungen müssen gelten, so dass A eine schwach dominante Strategie ist? Ist unter diesen Ungleichungen eine Strategie strikt dominiert?
- Welche Ungleichungen müssen gelten, so dass B eine beste Antwort auf B ist?
- Ist es möglich, dass A schwach dominant ist und B eine beste Antwort auf B ist? Falls ja, geben Sie passende Zahlen für die Parameter b und c an. Begründen Sie Ihre Antwort, falls dies nicht möglich ist.
- Geben Sie Ungleichungen an, so dass im Nash Gleichgewicht die beiden reinen Strategien A und B mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden und die Strategie C nicht gespielt wird.
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit von A als Ausdruck der Parameter b und c an, mit welcher A im gemischten Nash Gleichgewicht unter den Ungleichungen aus d) gespielt wird.
- Welche Ungleichungen müssen gelten, so dass mindestens ein Nash Gleichgewicht existiert?

Aufgabe 2 zu Kapitel 2:

Dynamische Spiele unter vollständiger Information

Betrachtet sei folgendes Spiel in Normalform:

	A	B	C
A	1 , 1	-1 , 0	5 , 0
B	0 , -1	0 , 0	2 , -1
C	0 , 5	-1 , 2	3 , 3

Begründen Sie Ihre Antworten auf folgende Fragen:

- a) Wie lauten die Nashgleichgewichte in reinen Strategien des obigen Spiels in Normalform?

Nehmen Sie an, das obige Spiel wird zweimal gespielt, wobei der Ausgang des ersten Spiels vor dem zweiten Spiel von beiden Spieler:innen beobachtet wird. Die Auszahlungen dieses wiederholten Spiels sind die Summen der Auszahlungen der Stufenspiele. Betrachten Sie für die Aufgabenteile b) bis f) nur dieses wiederholte Spiel.

- b) Geben Sie eine reine Strategie für das wiederholte Spiel an.
- c) Geben Sie eine beste Antwort auf die von Ihnen in b) genannte reine Strategie an.
- d) Geben Sie ein teilspielperfektes Nashgleichgewicht für das wiederholte Spiel an.
- e) Geben Sie ein teilspielperfektes Nashgleichgewicht an, in welchem die Strategien für unterschiedliche Spielverläufe in der zweiten Runde unterschiedliche Aktionen vorsehen.
- f) Gibt es ein teilspielperfektes Nashgleichgewicht, in welchem in der ersten Runde beide Spieler:innen C spielen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 zu Kapitel 3:

Statische Spiele unter unvollständiger Information

Claudio und Daniela spielen ein Spiel in Normalform, wobei Claudio die Auszahlungen des Spiels kennt und Daniela lediglich weiß, dass die Auszahlungen mit Wahrscheinlichkeit p , $0 < p < 1$ gemäß Auszahlungsmatrix I und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ gemäß Auszahlungsmatrix II sind:

	A	B
A	1 , 1	-1 , 2
B	2 , -1	0 , 0

Auszahlungsmatrix I

	A	B
A	1 , 1	1 , 0
B	0 , 1	0 , 0

Auszahlungsmatrix II

Stellen Sie das Spiel als Spielbaum dar, wobei sie ...

- ... alle Entscheidungs- und Endknoten sowie alle Aktionen einzeichnen. Die Entscheidungsknoten versehen Sie mit einem Kürzel für den/die entsprechende Spieler:in.
(Das Spiel beginnt mit einem Naturzug.)
- ... alle Informationsmengen einzeichnen.
- ... alle Endknoten mit Auszahlungen versehen.
- Wie lautet die Menge der reinen Strategien von Claudio? Für welche dieser Strategien entscheidet sich Claudio?
- Berechnen Sie den Erwartungsnutzen von Daniela für jede reine Strategie von Daniela unter Berücksichtigung der in d) identifizierten Strategie für Claudio!
- Wie lautet das Bayesianische Nashgleichgewicht für $p < \frac{1}{2}$?

Lösung zu Aufgabe 1

- a) A ist eine schwach dominante Strategie, falls $1 > c$ und $b \geq 0$ oder falls $1 \geq c$ und $b > 0$. Unter diesen Ungleichungen ist C immer strikt schlechter als A, also ist C strikt dominiert.
- b) B ist eine beste Antwort auf B, falls $b \leq 0$.
- c) Ja, zum Beispiel mit $b = c = 0$. In diesem Fall ist A eine schwach dominante Strategie ($1 > 0 = c$ und $b = 0 \geq 0 > -1$) und B ist eine Antwort auf B ($b = 0 \leq 0$).
- d) $0 < c < 1$ und $-1 < b < 0$ oder $c > 1$ und $b > 0$ oder $c = 1$ und $b = 0$.
- e) Es gelte $0 < c < 1$ und $-1 < b < 0$. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass A gespielt wird. Da C durch A strikt dominiert wird, wird C nicht gespielt. Dann gilt:

$$U(A, p) = p + (1 - p)b \text{ und } U(B, p) = pc$$

A hat den gleichen Erwartungsnutzen wie B, falls

$$p + (1 - p)b = pc \Leftrightarrow p(1 - c - b) = -b \Leftrightarrow p = \frac{-b}{1 - c - b} \in (0, 1)$$

Falls $c = 1$ und $b = 0$, so ist jede Wahrscheinlichkeit Teil eines Nash Gleichgewichts.

- f) Es existiert für alle Spezifikationen von b und c ein Nash Gleichgewicht, möglicherweise in gemischten Strategien. Es müssen also keine Ungleichungen gelten.

Lösung zu Aufgabe 2

a) (A,A) und (B,B).

b) $s \in \{A, B, C\}^{10}$, wobei s_1 Aktion zu Beginn des Spiels und $s_t, = 2, \dots, 10$ Aktion bei $t-1$ -tem Spielausgang der ersten Runde: $\{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$

Insgesamt $3^{10} = 59049$ Strategien

Beispiele:

- „immer A“
- „Beginne mit C, danach immer A“

c) Beste Antwort auf immer A: immer A

Beste Antwort auf Beginne mit C, danach immer A: immer A

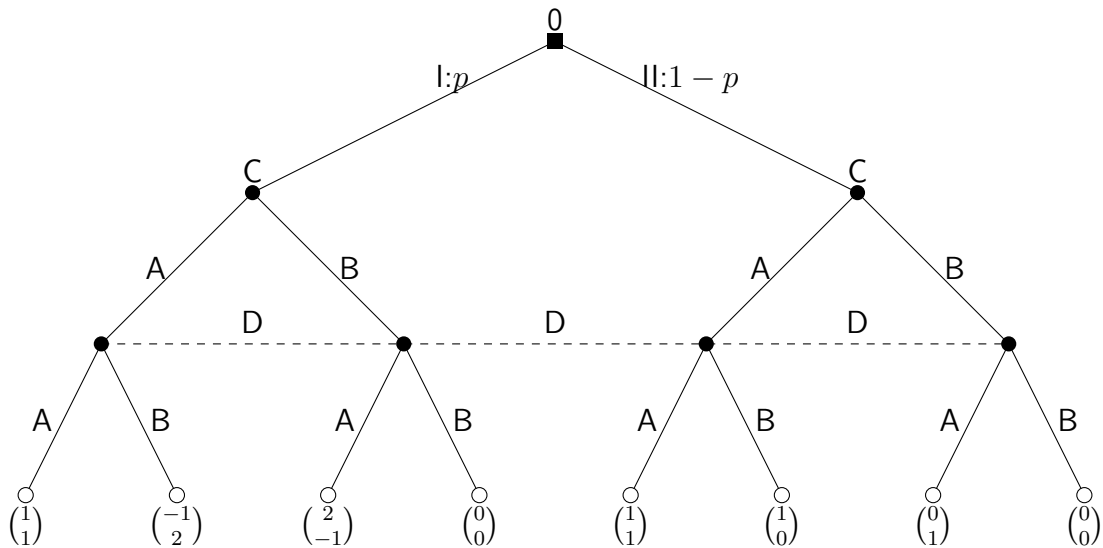
d) immer A, immer A

e) Beginne mit A. Spiele A, falls der beide mit C begonnen haben, andernfalls spiele B.

f) Nicht möglich, es gibt kein solches tspNGG. Angenommen die Strategie $Cs_2 \dots s_{10}$ würde ein symmetrisches tspNGG konstituieren, wobei $s_i \in \{A, B\}$ für $i = 2, \dots, 10$. Die Gleichgewichtsauszahlung betrüge dann 3 oder 4, je nachdem, ob in der zweiten Stufe (A,A) oder (B,B) gespielt würde. Ein Abweichen in der zweiten Stufe auf A würde dann aber zu den Auszahlungen 5 oder 6 führen, je nachdem, ob in der zweiten Stufe (A,A) oder (B,B) gespielt würde, eine strikte Verbesserung.

Lösung für Aufgabe 3

a), b), c)



d) Die Menge der reinen Strategien von Claudio lautet $S_C = \{A, B\}^2 = \{AA, AB, BA, BB\}$. Er entscheidet sich für BA , weil B in Auszahlungsmatrix I dominiert und A in Auszahlungsmatrix II dominiert.

e)

$$U_D(BA, A) = p(-1) + (1-p) \cdot 1 = 1 - 2p$$

$$U_D(BA, B) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0 = 0$$

f) Für $p < \frac{1}{2}$ entscheidet sich Daniela für A und das BNGG lautet (AB, A) .