

Kapitel 2

Dynamische Spiele unter vollständiger Information



Moodle

Kapitel 2 Dynamische Spiele unter vollständiger Information

2.1 Dynamische Spiele unter vollständiger und vollkommener Information

2.2 Zweistufige Spiele unter vollständiger aber unvollkommener Information

2.3 Wiederholte Spiele

2.4 Dynamische Spiele unter vollständiger aber unvollkommener Information

Dynamische Spiele unter vollständiger und vollkommener Information

Vollständige und vollkommene Information

Vollständige Information

Alle Spieler:innen kennen die Auszahlungsfunktionen aller Spieler:innen.

Vollkommene Information

Zum Zeitpunkt ihrer jeweiligen Entscheidungen wissen alle Spieler:innen mit Sicherheit, in welcher Entscheidungssituation sie sich befinden.

Der Begriff „Entscheidungssituation“ ist ungenau. Wir werden dies später präzisieren.

Einführendes Beispiel: Ultimatumspiel

Anne verwaltet 1000€ und kann sich zwischen zwei Möglichkeiten entscheiden:

- ▶ Gebe Bob davon 500€ ab und behalte den Rest
- ▶ Gebe Bob davon 50€ ab und behalte den Rest

Bob beobachtet Annes Entscheidung und hat ebenfalls zwei Möglichkeiten:

- ▶ Lehne das Angebot ab, was dazu führt, dass beide leer ausgehen.
- ▶ Nehme das Angebot an, was dazu führt, dass die Transaktion durchgeführt wird.

Ist Bobs Drohung, das Angebot abzulehnen, **glaubwürdig**?

Klasse einfacher dynamischer Spiele mit vollständiger und vollkommener Information

1. Spielerin 1 wählt eine **Aktion** a_1 aus der Menge A_1 .
2. Spieler 2 beobachtet a_1 und wählt eine **Aktion** a_2 aus der Menge A_2 .
3. Die Auszahlungen sind $u_1(a_1, a_2)$ und $u_2(a_1, a_2)$.

Viele ökonomische Anwendungen lassen sich durch Variationen von Spielen dieser Klasse darstellen.

Theorie: Rückwärtsinduktion

Für ein gegebenes $a_1 \in A_1$ löst Spieler 2 folgendes Problem:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2)$$

Wir nennen eine solche Lösung **Reaktion** oder **beste Antwort** auf die Aktion a_1 von Spielerin 1 und bezeichnen diese mit $R_2(a_1)$.

Die Funktion $R_2 : A_1 \rightarrow A_2$ heißt **Reaktionsfunktion**.

Spielerin 1 antizipiert R_2 und löst folgendes Problem:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, \underbrace{R_2(a_1)}_{a_2})$$

Definition: Rückwärtsinduktionsergebnis (RIE)

Für eine Lösung a_1^* des Optimierungsproblems von Spielerin 1 heißt $(a_1^*, R_2(a_1^*))$ **Rückwärtsinduktionsergebnis (RIE)**.

Wir werden in diesem Kapitel untersuchen, was der Zusammenhang zwischen RIE und Nash Gleichgewicht ist.

Beispiel 1: Kontrolle

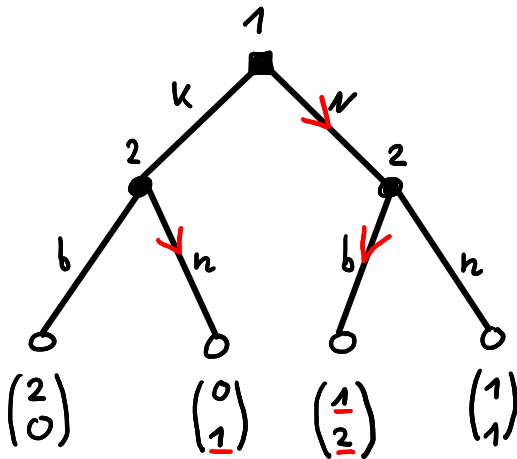
1. Eine Kontrollbehörde entscheidet, ob sie eine bestimmte Firma kontrolliert („K“) oder nicht („N“).
2. Die Firma beobachtet die Entscheidung der Kontrollbehörde und entscheidet danach, ob sie betrügt („b“) oder nicht („n“).
3. Betrügt die Firma nicht, so erhält sie 1. Betrügt die Firma und wird nicht kontrolliert, erhält sie 2, andernfalls 0.
4. Kontrolliert die Behörde nicht, so erhält sie 1. Kontrolliert die Behörde und erwischt die Firma, erhält sie 2, andernfalls 0.

Die Reaktionsfunktion der Firma hat die Werte

$$R_2(K) = n \text{ und } R_2(N) = b$$

Das Rückwärtsinduktionsergebnis lautet hier:

$$(N, b)$$



■ : 1. Entscheidungs-knoten

● : Entsch. Knoten

○ : Endknoten

Darstellung als Spiel in Normalform
(Variante 1)

(1)

	b	n
K	<u>2</u> , 0	0, <u>1</u>
N	1, <u>2</u>	<u>1</u> , 1

kein NGG
(in reinen Strat.)

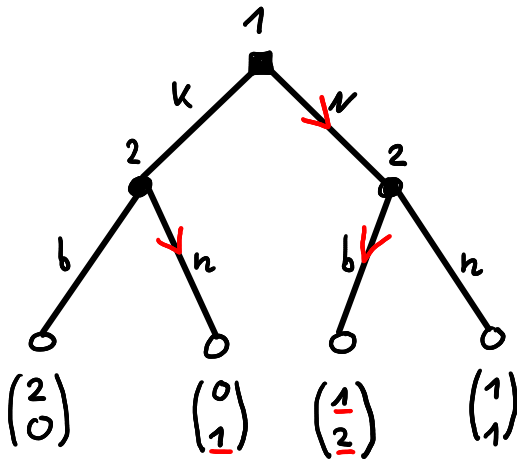
Darstellung des Spiels in Normalform
(Variante 2: Firma kann reagieren)

$$S_2 = \{ \overset{K}{b} \overset{N}{b}, \overset{K}{b} \overset{N}{n}, \overset{K}{n} \overset{N}{b}, \overset{K}{n} \overset{N}{n} \}$$

Falls 1: K
Falls 2: N

	bb	bn	nb	nn
K	<u>2</u> , 0	<u>2</u> , 0	0, <u>1</u>	0, <u>1</u>
N	1, <u>2</u>	1, 1	* <u>1</u> , <u>2</u>	<u>1</u> , 1

(1)



■ : 1. Entscheidungs-knoten

● : Entsch. Knoten

○ : Endknoten

Darstellung als Spiel in Normalform (Variante 1)

(1) $R, E: a$

(2)

K

N

	\underline{L}	\underline{R}
\underline{L}	$\underline{2}, 0$	$0, \underline{1}$
\underline{R}	$1, \underline{2}$	$\underline{1}, 1$

$(1, 1)$

$(3, 0)$ kein NGG

(in reinen Strat.)

$4, 0$

$3, 2$

Darstellung des Spiels in Normalform
(Variante 2: Firma kann reagieren)

$$S_2 = \{ \overset{K}{b} \overset{N}{b}, \overset{K}{b} \overset{N}{n}, \overset{K}{n} \overset{N}{b}, \overset{K}{n} \overset{N}{n} \}$$

Falls 1: K
Falls 2: N

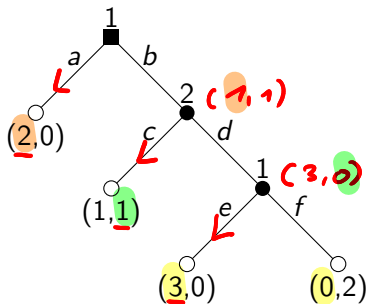
	bb	bn	nb	nn
K	<u>2</u> , 0	<u>2</u> , 0	0, <u>1</u>	0, <u>1</u>
N	1, <u>2</u>	1, 1	* <u>1</u> , <u>2</u>	<u>1</u> , 1

(1)

Beispiel 2 und Diskussion der Rückwärtsinduktion

1. Anne (Spielerin 1) wählt a oder b .
 a beendet das Spiel mit den Auszahlungen $(2, 0)$.
2. Bob (Spieler 2) beobachtet Anne und falls Anne b wählt, entscheidet sich Bob zwischen c und d .
 c beendet das Spiel mit den Auszahlungen $(1, 1)$.
3. Anne beobachtet Bob und falls Bob d wählt, entscheidet sich Anne zwischen e und f .
Das Spiel endet mit den Auszahlungen $(3, 0)$ nach e und $(0, 2)$ nach f .

Spielbaumdarstellung

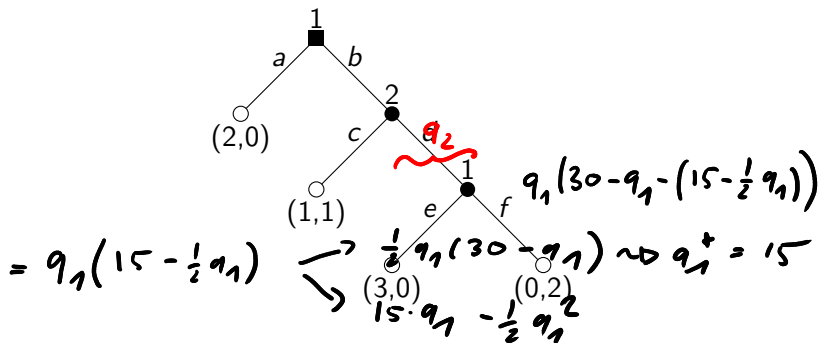


R1E: a

4,0

3,2

Rückwärtsinduktion mit Spielbaumdarstellung



3. Stufe (zweite Entscheidung von Anne) $\rightarrow 3 > 0$, also e.

2. Stufe (Entscheidung von Bob)
 $15 - q_1 = 0 \Rightarrow q_1^* = 15 \leadsto R_2(15) = 15 - \frac{1}{2} 15 = \frac{1}{2} 15$
 Bob antizipiert e von Anne und erwartet 0 nach d.
 Wegen $1 > 0$ entscheidet sich Bob für c.

1. Stufe (erste Entscheidung von Anne)
 $(15, \frac{1}{2} 15) \Rightarrow P(15, \frac{1}{2} 15) = P(22, 7.5) = 11.5$
 Anne antizipiert c von Bob und erwartet 1 nach b.
 Wegen $2 > 1$ wählt Anne a. $\pi_1 = 7.5 \cdot 15$ $\pi_2 = 7.5 \cdot 7.5$

Beispiel 3: Das Stackelberg Duopol

Firma 1 („Marktführer“) wählt $q_1 \geq 0$

Firma 2 („Mengenanpasser“) beobachtet q_1 und wählt $q_2 \geq 0$.

Marktpreis & Kosten:

Wie in Kapitel 1:

$$\begin{aligned}P(q_1 + q_2) &= \max\{34 - q_1 - q_2, 0\} \\c(q_i) &= 4 \cdot q_i, i = 1, 2\end{aligned}$$

Gewinn für $q_1 + q_2 \leq 34$: ~~7,5 · 7,5~~

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \cdot 15^2 \pi_1(q_1, q_2) \cdot \frac{1}{4} q_2^2 (30 - q_1 - q_2) \\&4 \quad \pi_2(q_1, q_2) = q_2 (30 - q_1 - q_2)\end{aligned}$$

Das Stackelberg Duopol: Rückwärtsinduktion

Das Maximierungsproblem von Firma 2

$$\max_{0 \leq q_2 \leq 30 - q_1} q_2 (30 - q_1 - q_2) \text{ für gegebenes } q_1$$

Die Maximumstelle in Abhängigkeit von q_1 ist die **Reaktion** von Firma 2 (siehe Kapitel 1.2).

$$R_2(q_1) = \begin{cases} 15 - \frac{q_1}{2} & \text{falls } q_1 \leq 30 \\ 0 & \text{falls } q_1 > 30 \end{cases}$$

Es gilt:

$$q_1 < 30 \Rightarrow q_1 + R_2(q_1) < 30 \Rightarrow P(q_1 + R_2(q_1)) > 4$$

Das Stackelbergduopol: Rückwärtsinduktion

Firma 1 antizipiert $R_2(q_1) = \max \left\{ 15 - \frac{q_1}{2}, 0 \right\}$ und hat folgendes Maximierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq q_1 \leq 30} q_1 (30 - q_1 - \overbrace{R_2(q_1)}^{q_2}) &= q_1 (30 - q_1 - (15 - \frac{1}{2} q_1)) \\ &= q_1 (15 - \frac{1}{2} q_1) \end{aligned}$$

$\rightarrow \frac{1}{2} q_1 (30 - q_1) \leadsto q_1^* = 15$
 $\searrow 15 \cdot q_1 - \frac{1}{2} q_1^2$

Bedingung erster Ordnung:

$$15 - q_1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow q_1^* = 15 \leadsto R_2(15) = 15 - \frac{1}{2} 15 = \frac{1}{2} 15$$

Rückwärtsinduktionsergebnis:

$$\begin{aligned} (15, \frac{1}{2} 15) &\Rightarrow P(15 + \frac{1}{2} 15) = P(22,5) = 11,5 \\ \pi_1 &= 7,5 \cdot 15 \quad \pi_2 = 7,5 \cdot 7,5 \end{aligned}$$

Strategie von Bob:

Eine bestimmte Aktion für jeden möglichen Entscheidungsknoten von Bob.

$$s_B: [0,1] \rightarrow \{ \text{ja}, \text{nein} \}$$

eine beste Antwort:

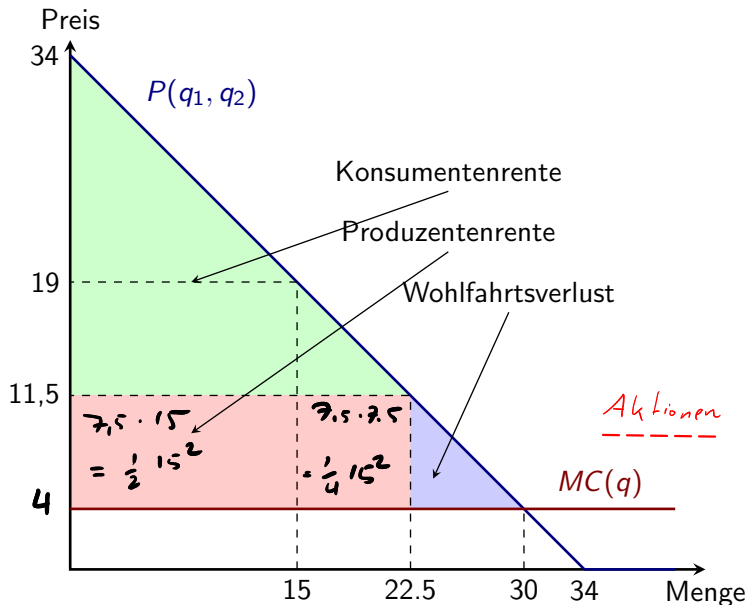
$$1-p: s_B(a_1) = \begin{cases} \text{ja} & \text{falls } a_1 < 1 \\ \text{nein} & \text{falls } a_1 = 1 \end{cases}$$

$$0 \leq p \leq 1$$

eine andere beste Antwort

$$p: s_B(a_1) = \text{ja} \quad \text{für alle } a_1 \in [0,1]$$

Wohlfahrtsanalyse Stackelberg Duopol



Beispiel 4: Das Ultimatum Spiel

Zwei Spieler: Anne und Bob $\leadsto s_B(a_1) = ja$

Aktionen:

Anne wählt eine Aktion a_1 aus der Menge $A_1 = [0, 1]$.

Die Aktion a_1 bedeutet:

Anne bekommt a_1 und Bob bekommt $1 - a_1$.

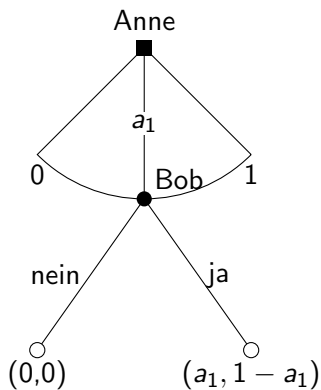
Bob nimmt das Angebot an („ja“) oder nicht („nein“).

Auszahlungen:

Falls ja: $u_A(a_1, ja) = a_1$ und $u_B(a_1, ja) = 1 - a_1$.

Falls nein: $u_A(a_1, nein) = 0 = u_B(a_1, nein)$

Das Ultimatum Spiel als Spielbaum



Strategie von Bob:

Eine bestimmte Aktion für jeden möglichen Entscheidungsknoten von Bob.

$$s_B: [0,1] \rightarrow \{ \text{ja}, \text{nein} \}$$

eine beste Antwort:

$$1-p: s_B(a_1) = \begin{cases} \text{ja} & \text{falls } a_1 < 1 \\ \text{nein} & \text{falls } a_1 = 1 \end{cases}$$

$$0 \leq p \leq 1$$

eine andere beste Antwort

$$p: s_B(a_1) = \text{ja} \quad \text{für alle } a_1 \in [0,1]$$

Das Ultimatum Spiel – Rückwärtsinduktion: Stufe 2

Fall $a_1 < 1$:

$$u_B(a_1 < 1, \text{ja}) = 1 - a_1 > 0 = u_B(a_1 < 1, \text{nein})$$

Beste Antwort auf $a_1 < 1$: ja.

Fall $a_1 = 1$:

$$u_B(a_1 = 1, \text{ja}) = 1 - a_1 = 0 = u_B(a_1 = 1, \text{nein})$$

In diesem Fall sind ja und nein und alle gemischten ~~Strategien~~ ^{Aktionen} von Bob eine beste Antwort!

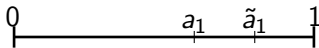
Beste Antworten auf $a_1 = 1$: $p \cdot \text{ja} + (1 - p) \cdot \text{nein}$ mit $p \in [0, 1]$.

Das Ultimatum Spiel – Rückwärtsinduktion: Stufe 1

Prüfe $a_1 < 1$: (mit ja) $\leadsto s_B(a_1) = \text{ja}$

$$\Rightarrow u_A(a_1 < 1, \text{ja}) = a_1$$

Aber für $\tilde{a}_1 = \frac{a_1+1}{2} < 1$ gilt:



$$u_A(\tilde{a}_1 < 1, \text{ja}) = \tilde{a}_1 > a_1$$

$a_1 < 1$ maximiert Annes Nutzen bei der besten Antwort „ja“ nicht.

$a_1 < 1$ kann also kein Teil eines RIE sein.

Das Ultimatum Spiel – Rückwärtsinduktion: Stufe 1

Prüfe $a_1 = 1$: (mit $p \cdot \text{ja} + (1 - p) \cdot \text{nein}$)

$$\Rightarrow U_A(a_1 = 1, p) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p \leq 1$$

Vergleiche mit Abweichung nach unten: $\tilde{a}_1 < 1$:

$$u_A(\tilde{a}_1 < 1, \text{ja}) = \tilde{a}_1 < 1$$

$a_1^* = 1$ kann also nur Teil eines RIE sein, falls $p = 1$!

$$\Rightarrow \text{RIE} : (a_1^* = 1, \text{ja})$$

Das Ultimatum Spiel – Diskussion

Rückwärtsinduktions Ergebnis: Anne beansprucht den Anteil $a_1 = 1$ für sich und Bob ist damit einverstanden und erhält 0, was er auch ohne Einverständnis bekommen würde.

Wir sollten aus zwei Gründen skeptisch sein, dieses Ergebnis auf menschliche Entscheidungen zu übertragen:

1. Menschen fühlen Neid und Mißgunst und interessieren sich daher auch für den Anteil anderer Personen.
2. Selbst ohne Neid und Mißgunst gibt es zwar keinen zwingenden Grund bei $a_1 = 1$ das Angebot abzulehnen, es gibt aber auch keinen zwingenden Grund, das Angebot anzunehmen.

Können wir das Spiel so modifizieren, dass auch solche Personen teilen, die sich nicht für den Anteil der anderen Personen interessieren?

Das Rubinstein Verhandlungsspiel

Zwei Spieler: Anne und Bob

$\delta \in (0, 1)$: Diskontierungsfaktor für beide Spieler:innen

1 a) Anne schlägt Aufteilung $(a_1, 1 - a_1)$ vor (mit $0 \leq a_1 \leq 1$).

1 b) Bob nimmt das Angebot an (ja) oder nicht (nein).

ja: Anne bekommt a_1 , Bob bekommt $1 - a_1$.

nein: \rightarrow Stufe 2

2 a) Bob schlägt Aufteilung $(1 - b_2, b_2)$ vor (mit $0 \leq b_2 \leq 1$).

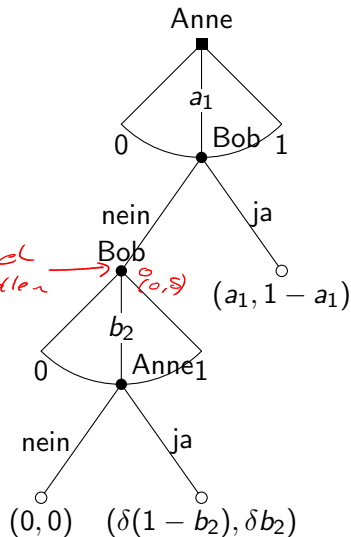
2 b) Anne nimmt das Angebot an (ja) oder nicht (nein).

ja: Anne bekommt $\delta(1 - b_2)$, Bob bekommt δb_2

nein: Beide bekommen nichts ($u_A = u_B = 0$).

Stufe 2 entspricht dem (abdiskontierten) Ultimatum Spiel mit vertauschten Rollen.

Das Verhandlungsspiel als Spielbaum



Ultimatumspiel
- vertauschte Rollen
- Diskontierung

R1E: $b_2 = 1$ (Bob)
ja (Anne)

$U_A = 0$, $U_B = \delta$

Verhandlungsspiel – Rückwärtsinduktion

Wir kennen das RIE für Stufe 2 bereits:

(Abdiskontiertes Ultimatum Spiel mit vertauschten Rollen)

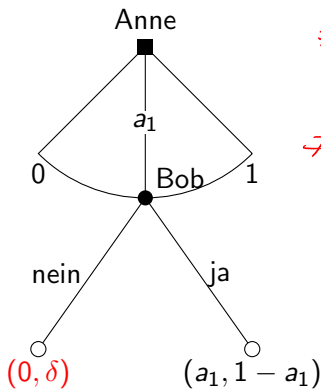
$b_2 = 1$ und Anne sagt ja

Dieses RIE für Stufe 2 wird von den Spieler:innen in Stufe 1 antizipiert.

Wir können nun die Stufe 2 durch die abdiskontierten Auszahlungen von Anne und Bob im RIE ersetzen:

Anne wird in Stufe 2 $u_A = \delta \cdot 0 = 0$ erhalten und Bob $u_B = \delta \cdot 1 = \delta$.

Das reduzierte Verhandlungsspiel (bei 2 Stufen)



Falls $1 - a_1 > \delta$

Bob: ja

Falls $1 - a_1 < \delta$

Bob: nein.

Falls $1 - a_1 = \delta$

$\Leftrightarrow a_1 = 1 - \delta$

Bob: ja \sim nein

P/E: $a_1 = 1 - \delta$ (Anne)
52 (Bob)

Auszahlung e_n : $U_A = 1 - \delta$

$U_B = \delta$

Das Verhandlungsspiel – Rückwärtsinduktion: Stufe 1

Falls Bob das Angebot $1 - a_1$ ablehnt, kann er sich in Stufe 2 $u_B = \delta$ sichern.

Falls $1 - a_1 < \delta$: Bob zieht nein strikt vor.

Falls $1 - a_1 > \delta$: Bob zieht ja strikt vor.

Falls $1 - a_1 = \delta$: Bob ist indifferent zwischen ja und nein.

Analog zur Argumentation im Ultimatum Spiel ergibt sich als RIE:

Anne bietet Bob in Stufe 1 $1 - a_1 = \delta$ an. Bob nimmt das Angebot an.

Auszahlung des RIE im Verhandlungsspiel mit 2 Stufen:

$$(u_A^*, u_B^*) = (1 - \delta, \delta)$$

Verhandlungsspiel mit 3 Stufen

Stufe 1: Anne schlägt $(a_1, 1 - a_1)$ vor.

Falls Bob a_1 annimmt $\rightarrow (u_A, u_B) = (a_1, 1 - a_1)$

Falls Bob a_1 ablehnt:

Stufe 2: Bob schlägt $(1 - b_2, b_2)$ vor.

Falls Anne b_2 annimmt $\rightarrow (u_A, u_B) = (\delta(1 - b_2), \delta b_2)$

Falls Anne b_2 ablehnt:

Stufe 3: Anne schlägt $(a_3, 1 - a_3)$ vor.

Falls Bob a_3 annimmt $\rightarrow (u_A, u_B) = (\delta^2 a_3, \delta^2(1 - a_3))$

Falls Bob a_3 ablehnt: beide bekommen nichts.

Im RIE bietet Anne Bob in der ersten Stufe $1 - a_1 = \underline{\delta - \delta^2}$ an.
Bob nimmt das Angebot an. Die Auszahlungen lauten dann:

$$(u_A^*, u_B^*) = (1 - \delta + \delta^2, \delta - \delta^2)$$

Das Verhandlungsspiel mit mehreren Stufen

In allen untersuchten Fällen wird im RIE das erste Angebot angenommen und das Spiel endet sofort.

Auszahlungen im RIE des Verhandlungsspiels

eine Stufe:

$$u_A^* = 1$$
$$u_B^* = 0$$

zwei Stufen:

$$u_A^* = 1 - \delta$$
$$u_B^* = 0 + \delta$$

drei Stufen:

$$u_A^* = 1 - \delta + \delta^2$$
$$u_B^* = 0 + \delta - \delta^2$$

Können wir diese Reihe fortführen?

$$u_A^* = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \delta^4 - \delta^5 + \dots$$

$$1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \delta^4 - \delta^5 + \delta^6 - \dots$$

$$= \delta^0 + \delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \dots - \delta^1 - \delta^3 - \delta^5 - \delta^7 - \dots$$

$$\delta^{a \cdot b} = (\delta^a)^b$$

$$= \delta^0 + \delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \dots - \delta(\delta^0 + \delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \dots)$$

$$= (1 - \delta)(\delta^0 + \delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \dots)$$

$$= (1 - \delta)(\delta^2)^0 + (\delta^2)^1 + (\delta^2)^2 + (\delta^2)^3 + \dots$$

$$= (1 - \delta) \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (\delta^2)^i}_{\substack{\text{geometrische} \\ \text{Reihe} = \frac{1}{1 - \delta^2}}} = (1 - \delta) \frac{1}{1 - \delta^2} = (1 - \delta) \frac{1}{(1 - \delta)(1 + \delta)}$$

$$= \frac{1}{1 + \delta} = U_A^*$$

$$\Rightarrow U_B^* = \frac{\delta}{1 + \delta}$$

geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = a^0 + a^1 + a^2 + \dots \quad |a| < 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a^i = a^1 + a^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^T a^i - \sum_{i=1}^{T+1} a^i &= a^0 - a^{T+1} = \sum_{i=0}^T a^i - a \sum_{i=0}^T a^i \\ &= (1-a) \sum_{i=0}^T a^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{T+1} a^i &= a^1 + a^2 + \dots + a^{T+1} \\ &= a(a^0 + a^1 + \dots + a^T) = a \cdot \sum_{i=0}^T a^i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^T a_i = \frac{a^0 - a^{T+1}}{1-a} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a}$$

Modifikation: unendliches Verhandlungsspiel

Ariel Rubinstein "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model" (1982) *Econometrica* Vol. 50

Unendliche Stufenzahl:

Immer wenn eine Person ein Angebot ablehnt, kann diese Person ein neues Angebot unterbreiten.

Nach jeder erfolglosen Verhandlungsstufe schrumpft die Verhandlungsmasse um $\delta \in (0, 1)$.

Die Rückwärtsinduktion ist nicht möglich, da es keinen letzten Entscheidungsknoten gibt.

Rubinstein löst das Problem der fehlenden letzten Stufe durch einen Trick (Stationarität) und zeigt, dass die Auszahlungen im RIE des Verhandlungsspiels mit unendlich vielen Stufen lauten:

$$(u_A^*, u_B^*) = \left(\frac{1}{1 + \delta}, \frac{\delta}{1 + \delta} \right)$$

Das Verhandlungsspiel: Diskussion

Interpretationen des Diskontierungsfaktors $\delta \in (0, 1)$:

- ▶ Ungeduld ($\delta \rightarrow 0$: ungeduldig, $\delta \rightarrow 1$: geduldig)
- ▶ Inflation ($\delta \rightarrow 0$: hoch, $\delta \rightarrow 1$: niedrig)
- ▶ Wahrscheinlichkeit für Fortgang des Spiels
- ▶ ...

Für $\delta \rightarrow 1$ konvergieren die Anteile der beiden Spieler:innen im unendlichen Verhandlungsspiel $\left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$ gegen $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, der fairsten Aufteilung!

Beachte: Auch im unendlichen Verhandlungsspiel endet das Spiel bereits nach dem ersten Angebot.

Für $\delta < 1$ hat die Person, welche beginnt, einen Vorteil.

Für $\delta = 0$ handelt es sich um das Ultimatum Spiel.

Schlüsselwörter in Kapitel 2.1

- ▶ Vollkommene Information
- ▶ Spielbaumdarstellung
- ▶ Rückwärtsinduktion/Rückwärtsinduktionsergebnis
- ▶ Stackelberg-Duopol
- ▶ Rubinstein-Verhandlungsspiel

Zweistufige Spiele unter vollständiger aber unvollkommener Information

Wiederholung: Informationsbegriffe

Vollständige Information:

Die Auszahlungsfunktionen aller Spieler:innen sind allen Spieler:innen bekannt.

Spiele mit unvollständiger Information → Kapitel 3 (und 4)

Vollkommene Information:

Jede:r Spieler:in kennt zum Zeitpunkt seiner Entscheidung den bisherigen Spielverlauf.

Unvollkommene Information: Manche Entscheidungen anderer Spieler:innen sind für manche Spieler:innen nicht beobachtbar.

Ein einfaches zweistufiges Spiel mit vollständiger aber unvollkommener Information

Stufe 1 Spieler 1 wählt eine Aktion a_1 aus der Menge A_1 .

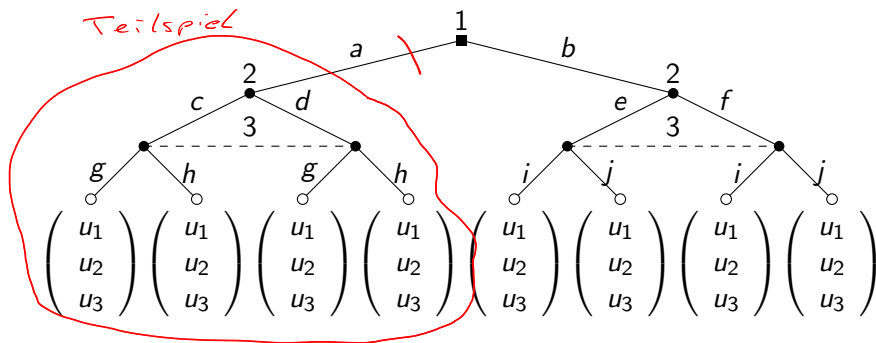
Stufe 2 Spieler:innen 2 und 3 beobachten a_1 und wählen gleichzeitig Aktionen a_2 und a_3 aus den Mengen A_2 und A_3 .

► Auszahlungen: $u_i(a_1, a_2, a_3)$ für $i = 1, 2, 3$

Unvollkommene Information:

In Stufe 2 wissen Spieler:innen 2 und 3 zum Zeitpunkt ihrer Entscheidung nicht, wie sich die/der jeweils andere Spieler:innen entscheidet.

Spielbaumdarstellung des Beispiels



Gestrichelten Linien („Informationsmengen“):

Spieler 3 kann die verbundenen Knoten nicht unterscheiden!
(3 weiß nicht, wie sich 2 entscheidet.)

Jeder durch gestrichelte Linien verbundene Knoten muss identische Aktionen haben, denn sonst wäre der Knoten unterscheidbar.

(Unformale) Definition: Teilspiel

Ein Teil eines Spielbaumes ist ein **Teilspiel**, falls es mindestens einen Entscheidungsknoten enthält und nur durch eine Linie mit dem Rest des Spielbaums verbunden ist.

Das gesamte Spiel ist ebenfalls ein Teilspiel.

Lösung des zweistufigen Spiels mit vollständiger aber unvollkommener Information

Wir lösen dieses Spiel im Geiste der Rückwärtsinduktion und beginnen mit der Analyse der 2. Stufe.

Bei Spielen mit vollkommener Information beginnen wir die Rückwärtsinduktion in einer „letzten Entscheidung“.

In Spielen unvollkommener Information ist dies nicht (immer) möglich.

In dem vorliegenden zweistufigen Spiel unvollkommener Information beginnen wir mit einem letzten **Teilspiel**.

„Rückwärtsinduktion“

Stufe 2:

Jede Entscheidung a_1 von Spieler 1 induziert ein Teilspiel für Spieler:innen 2 und 3.

Da sich 2 und 3 „simultan“ entscheiden, ist dieses Teilspiel ein Spiel in Normalform (aus Kapitel 1).

Als Spiel in Normalform besitzt dieses Teilspiel mindestens ein Nash Gleichgewicht.

Wähle ein beliebiges Nash Gleichgewicht, falls es mehrere gibt.

Nenne dieses Nash Gleichgewicht $(a_2^*(a_1), a_3^*(a_1))$.

„Rückwärtsinduktion“

Stufe 1:

Spieler 1 antizipiert für jede Entscheidung a_1 die Auszahlung $u_1(a_1, a_2^*(a_1), a_3^*(a_1))$.

Unter Vorwegnahme aller möglichen Reaktionen $a_2^*(\cdot)$ und $a_3^*(\cdot)$ entscheidet sich 1 für a_1^* .

Das Nash Gleichgewicht $(a_1^*, a_2^*(\cdot), a_3^*(\cdot))$ heißt **teilspielperfekt**, da es ein Nash Gleichgewicht in jedem Teilspiel induziert.

Das teilspielperfekte Ergebnis lautet $(a_1^*, a_2^*(a_1^*), a_3^*(a_1^*))$.

Beispiel: Bank Runs

Zwei Investor:innen haben je 20€ bei einer Bank angelegt.

Die Bank hat dieses Geld in ein langfristiges Projekt investiert.

Muss die Bank das Geld vor Beendigung des Projektes zurückzahlen, so kann sie nur 30€ aufbringen.

Nach Beendigung des Projektes stehen der Bank 50€ zur Verfügung.

Die Investor:innen können ihr Geld zu zwei Zeitpunkten zurückfordern:

Datum 1: vor Beendigung des Projektes (Stufe 1)

Datum 2: nach Beendigung des Projektes (Stufe 2)

Die Auszahlungen werden durch Matrizen dargestellt.

Bank Runs: Auszahlungsmatrizen

		Investorin 2	
		abheben	nicht
Investor 1	abh.	15 , 15	20 , 10
	nicht	10 , 20	Stufe 2

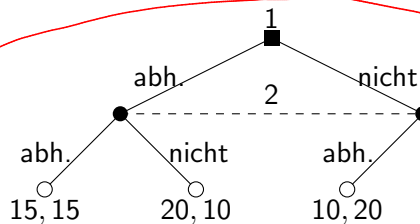
Datum 1

Teilspiel (II)

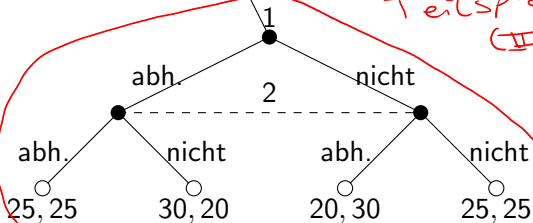
		abheben	nicht
		<i>N₆₆</i>	
Investor 1	abh.	* <u>25</u> , <u>25</u>	<u>30</u> , 20
	nicht	20 , <u>30</u>	25 , 25

Datum 2

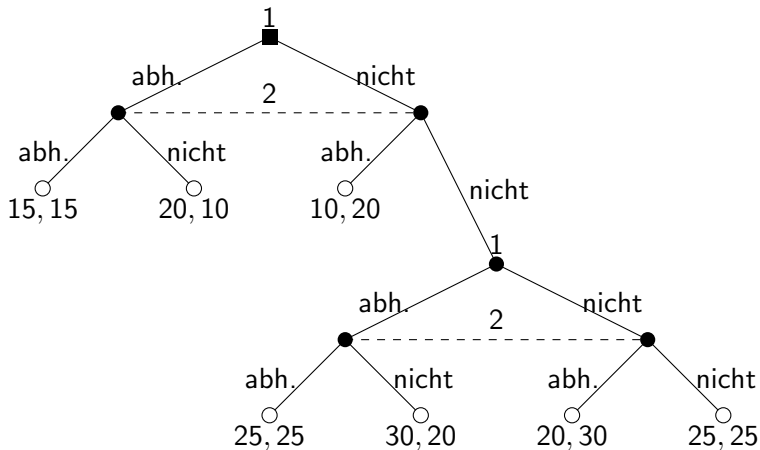
Bank Runs: Spielbaumdarstellung



$0(25, 25)$



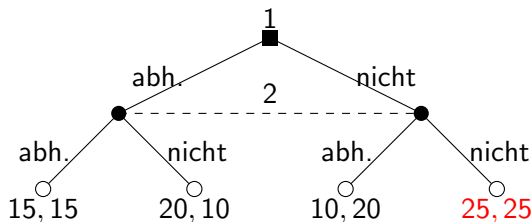
Bank Runs: Spielbaumdarstellung



Im 2. Teilspiel ist „abheben“ für beide Spieler:innen jeweils dominant.

→ Ersetze 2. Teilspiel durch Auszahlungen (25, 25).

Bank Runs: „Rückwärtsinduktion“



bzw. in Normalform:

		Investorin 2	
		abheben	nicht
Investor 1	abh.	* <u>15</u> , <u>15</u>	20 , 10
	nicht	10 , 20	* <u>25</u> , <u>25</u>

Datum 1

Bank Runs: Teilspielperfekte Ergebnisse

Im reduzierten Spiel der ersten Stufe gibt es zwei Nash Gleichgewichte (in reinen Strategien):

(abheben, abheben) und (nicht, nicht)

Zu jedem dieser Paare von Entscheidungen gibt es jeweils ein teilspielperfektes Ergebnis, in welchem in der zweiten Stufe (abheben, abheben) gespielt wird.

Im Gegensatz zum Gefangenendilemma sagt dieses Modell nicht voraus, dass es ein ineffizientes Ergebnis geben **muss**. Dennoch ist auch das ineffiziente Ergebnis mit Rationalität vereinbar.

Schlüsselwörter in Kapitel 2.2

- ▶ unvollkommene Information
- ▶ Informationsmengen
- ▶ Teilspiel
- ▶ teilspielperfektes Ergebnis
- ▶ Bank Runs

Wiederholte Spiele

Beispiel: Wiederholtes Gefangenenes Dilemma

		(2)	
		g	l
(1)	g	1 , 1	5 , 0
	l	0 , 5	4 , 4

Setup:

Nach der ersten Runde spielen (1) und (2) das Gefangenenes Dilemma ein zweites Mal.

Die Gesamtauszahlungen entsprechen der Summe der Auszahlungen der beiden Stufen.

Beispiel: Wiederholtes Gefangenenes Dilemma

Entscheidungen in Stufe I:

$a_1 \in A_1 = \{l, g\}$ und $a_2 \in A_2 = \{l, g\}$

Entscheidungen in Stufe II:

$a_3 \in A_3 = \{l, g\}$ und $a_4 \in A_4 = \{l, g\}$

In Stufe II sind allen Spieler:innen alle Entscheidungen aus Stufe I bekannt.

Der Nutzen von (1) und (2) ist eine Funktion aller Entscheidungen:

$$u_i(a_1, a_2, a_3, a_4) = \underbrace{u_i^I(a_1, a_2)}_{\text{Stufe I}} + \underbrace{u_i^{II}(a_3, a_4)}_{\text{Stufe II}}$$

Beispiel: Wiederholtes Gefangenen Dilemma

Spieler:innen 1 und 2 beobachten (a_1, a_2) , bevor sie (a_3, a_4) wählen.

Wie in Kapitel 2.2 definiert jedes $(a_1, a_2) \in \{l, g\} \times \{l, g\}$ ein **Teilspiel**.

Grundsätzlich dürfen die Aktionen (a_3, a_4) also eine Reaktion auf die Aktionen (a_1, a_2) sein.

Wir untersuchen nun die Entscheidungen in Stufe II für ein beliebiges Teilspiel (a_1, a_2) .

Wiederholtes Gefangenenes Dilemma: Stufe II

	g	(2)	l
(1)	g	$\begin{matrix} 1, 1 \\ +u_1^l(a_1, a_2) + u_2^l(a_1, a_2) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5, 0 \\ +u_1^l(a_1, a_2) + u_2^l(a_1, a_2) \end{matrix}$
	l	$\begin{matrix} 0, 5 \\ +u_1^l(a_1, a_2) + u_2^l(a_1, a_2) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4, 4 \\ +u_1^l(a_1, a_2) + u_2^l(a_1, a_2) \end{matrix}$

Für jede:n Spieler:in i wird lediglich die Konstante $u_i^l(a_1, a_2)$ zu **allen** Auszahlungen addiert.

Diese Konstante verändert die optimalen Entscheidungen nicht.

⇒ Für jedes Teilspiel (a_1, a_2) gibt es ein eindeutiges Nash Gleichgewicht in Stufe II:

$$a_3^*(a_1, a_2) = g, \quad a_4^*(a_1, a_2) = g$$

Wiederholtes Gefangenenes Dilemma: Stufe I

In Stufe I antizipieren die Spieler:innen $(a_3^*, a_4^*) = (g, g)$ und die damit verbundenen Auszahlungen $(u_1''(a_3^*, a_4^*), u_2''(a_3^*, a_4^*)) = (1, 1)$:

		g	(2)	I
(1)	g	$1 + \textcolor{red}{1} , 1 + \textcolor{red}{1}$		$5 + \textcolor{red}{1} , 0 + \textcolor{red}{1}$
	I	$0 + \textcolor{red}{1} , 5 + \textcolor{red}{1}$		$4 + \textcolor{red}{1} , 4 + \textcolor{red}{1}$

Wieder wird zu **allen** Auszahlungen die gleiche Konstante addiert, welche die optimalen Entscheidungen nicht verändert.

⇒ Einziges teilspielperfektes Ergebnis:

$$(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*)) = (g, g, g, g)$$

Definition: Endlich oft wiederholtes Spiel

Für ein gegebenes Stufenspiel G sei $G(T)$ das **endlich oft wiederholte Spiel**, in welchem G genau T -mal gespielt wird. In jeder Stufe sind die Ergebnisse der vorherigen Spiele allen Spieler:innen bekannt, bevor die jeweils nächste Entscheidung zu treffen ist. Die Auszahlungen von $G(T)$ entsprechen der Summe der Auszahlungen der T Stufen.

Proposition

Falls das Stufenspiel G ein eindeutiges Nash Gleichgewicht besitzt, dann hat das endlich oft wiederholte Spiel $G(T)$ ein eindeutiges teilspielperfektes Ergebnis: Das Nash Gleichgewicht von G wird in jeder Stufe gespielt.

Zweistufiges Spiel mit multiplen Gleichgewichten

		(2)		
		L	M	R
(1)	o	1 , 1	0 , 0	5 , 0
	m	0 , 0	3 , 3	0 , 0
	u	0 , 5	0 , 0	4 , 4

Zweistufiges Spiel mit multiplen Gleichgewichten

Zwei Nash Gleichgewichte: (o, L) und (m, M)

In jedem teilspielperfekten Ergebnis (in reinen Strategien) muss in der zweiten Stufe eines dieser beiden Nash Gleichgewichte gespielt werden.

Behauptung:

Wird in Stufe II (o, L) als **Drohung** und (m, M) als **Belohnung** benutzt, so kann (u, R) Teil eines teilspielperfekten Ergebnisses sein!

Dies gilt, obwohl (u, R) im Stufenspiel strikt dominiert ist! (Durch welche Strategie des Stufenspiels?)

Zweistufiges Spiel mit multiplen Gleichgewichten

Die Entscheidungen (a_3, a_4) in Stufe II dürfen von den Entscheidungen (a_1, a_2) in Stufe I abhängen.

Zum Beispiel:

$$a_3(a_1, a_2) = \begin{cases} m & \text{falls } (a_1, a_2) = (u, R) \text{ (Belohnung)} \\ o & \text{sonst (Drohung)} \end{cases}$$

$$a_4(a_1, a_2) = \begin{cases} M & \text{falls } (a_1, a_2) = (u, R) \text{ (Belohnung)} \\ L & \text{sonst (Drohung)} \end{cases}$$

Diese Entscheidungen konstituieren ein Nash Gleichgewicht in Stufe II, da entweder (o, L) gespielt wird, oder (m, M) .

Zweistufiges Spiel mit multiplen Gleichgewichten

$$a_3(a_1, a_2) = \begin{cases} m & \text{falls } (a_1, a_2) = (u, R) \text{ (Belohnung)} \\ o & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(Drohung)}$$

$$a_4(a_1, a_2) = \begin{cases} M & \text{falls } (a_1, a_2) = (u, R) \text{ (Belohnung)} \\ L & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(Drohung)}$$

(2)

		<i>L</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
(1)	<i>o</i>	<i>o</i> , <i>L</i>	<i>o</i> , <i>L</i>	<i>o</i> , <i>L</i>
	<i>m</i>	<i>o</i> , <i>L</i>	<i>o</i> , <i>L</i>	<i>o</i> , <i>L</i>
	<i>u</i>	<i>o</i> , <i>L</i>	<i>o</i> , <i>L</i>	<i>m</i> , <i>M</i>

Zweistufiges Spiel mit multiplen Gleichgewichten

In Stufe I antizipieren die Spieler:innen die möglichen Gleichgewichte von Stufe II und erwarten folgende Auszahlungen:

(2)

		L	M	R
(1)	o	$1, 1$ $+1, +1$	$0, 0$ $+1, +1$	$5, 0$ $+1, +1$
	m	$0, 0$ $+1, +1$	$3, 3$ $+1, +1$	$0, 0$ $+1, +1$
	u	$0, 5$ $+1, +1$	$0, 0$ $+1, +1$	$4, 4$ $+3, +3$

(u, R) ist nun ebenfalls optimal!

$\Rightarrow (u, R, m, M)$ ist ein teilspielperfektes Ergebnis.

Glaubwürdige Drohungen und Belohnungen in Stufe II können die Entscheidungen in Stufe I beeinflussen.

Diskussion: Nachverhandlungen

$$\text{Ist } a_3(a_1, a_2) = \begin{cases} m & \text{falls } (a_1, a_2) = (u, R) \text{ (Belohnung)} \\ o & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(Drohung)}$$

$$a_4(a_1, a_2) = \begin{cases} M & \text{falls } (a_1, a_2) = (u, R) \text{ (Belohnung)} \\ L & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(Drohung)}$$

wirklich glaubwürdig?

Angenommen, es kommt in Stufe I nicht zu (u, R) .

Würden die Spieler:innen nicht nach Stufe I einen Anreiz haben, ihre Entscheidungen in Stufe II nachzuverhandeln?

Das Nachverhandeln würde eine Abweichung **beider** Spieler:innen zur Folge haben.

Das Nash Gleichgewicht zieht aber nur Abweichungen von **eine:r** Spieler:in in Betracht.

Unendlich oft wiederholte Spiele

Endlich oft wiederholte Spiele:

Mithilfe von glaubwürdigen Drohungen und Belohnungen können (außer in der letzten Stufe) nicht-Nash Gleichgewichte als Teil von teilspielperfekten Ergebnissen implementiert werden.

Unendlich oft wiederholte Spiele:

Für unendlich oft wiederholte Spiele gilt dies für alle Stufen, da es keine letzte Stufe gibt.

Wir müssen dennoch zunächst zwei Probleme lösen:

- ▶ Summe der Auszahlungen der Stufenspiele?
- ▶ Letztes Teilspiel?

Unendlich oft wiederholte Spiele

Betrachte ein Stufenspiel G mit den Auszahlungsfunktionen u_1, \dots, u_n .

Wie können die Auszahlungen des **unendlich** oft wiederholten Spiels $G(\infty)$ modelliert werden?

Würde wieder die Summe der Auszahlungen des Stufenspiels benutzt, so wären alle positiven Auszahlungen gleich gut und alle negativen Auszahlungen gleich schlecht.

Es gäbe also nur die drei möglichen Auszahlungen $\{-\infty, 0, \infty\}$.

Unendlich oft wiederholte Spiele

Diskontierung:

Bewerte in Stufe t die Auszahlung der nächsten Stufe $t + 1$ mit Diskontierungsfaktor $0 < \delta < 1$.

Es bezeichne a_i^t die Aktion von Spieler:innen i im Stufenspiel der Stufe t (und a_{-i}^t die Aktionen aller anderen Spieler:innen).

Zu Beginn des wiederholten Spiels ist der Gesamtnutzen des Spiels gegeben durch:

$$\begin{aligned} & u_i(a_i^1, a_{-i}^1) + \delta u_i(a_i^2, a_{-i}^2) + \delta^2 u_i(a_i^3, a_{-i}^3) + \dots + \delta^{t-1} u_i(a_i^t, a_{-i}^t) + \dots \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(a_i^t, a_{-i}^t) \quad (< \infty, \text{ falls } u_i \text{ beschränkt}) \end{aligned}$$

Alternative Interpretation von δ :

Wahrscheinlichkeit, mit welcher die nächste Stufe stattfindet.

Unendlich oft wiederholtes Gefangenem Dilemma

In wiederholten Spielen können die Entscheidungen in Stufe t von den tatsächlich getroffenen Entscheidungen in den früheren Stufen abhängen.

Dies induziert schon nach sehr wenigen Stufen sehr viele Möglichkeiten.

Ein Stufenspiel mit $|S|$ möglichen Ergebnissen induziert $|S|^t$ möglichen Spielergebnissen nach der t -ten Stufe.

So müsste eine Spieler:in im Gefangenem Dilemma in der vierten Stufe schon $4^3 = 64$ mögliche Spielverläufe in Betracht ziehen.

Trigger-Strategien im Gefangenen Dilemma

Behauptung:

(I, I) kann als teilspielperfektes Ergebnis im unendlich oft wiederholten Gefangenen Dilemma implementiert werden.

Für dieses Resultat reicht es aus, wenn die Spieler:innen **Trigger-Strategien** benutzen.

Beispiel für eine Trigger-Strategie:

$$a_i^1 = I \text{ und } a_i^t(a_j^1, \dots, a_j^{t-1}) = \begin{cases} I & \text{falls } a_j^1 = \dots a_j^{t-1} = I \\ g & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Trigger-Strategie beginnt mit I in der ersten Stufe und wählt I in Stufe t , falls der/die andere Spieler:in bis Stufe $t - 1$ immer I gewählt hat. Falls der/die andere Spieler:in in einer beliebigen Stufe g wählt, wählt die Trigger-Strategie ab dann immer g .

Trigger-Strategien im Gefangenen Dilemma

		(2)	
		g	l
(1)	g	1 , 1	5 , 0
	l	0 , 5	4 , 4

Angenommen, (2) folgt der Trigger-Strategie.

Ist es dann optimal für (1) auch der Trigger-Strategie zu folgen?

Wir betrachten zunächst eine Abweichung von (1) in Stufe 1:

Falls (1) g wählt, wählt (2) dann ab Stufe 2 für immer g .

(1) erzielt dann in einer beliebigen späteren Stufe den Nutzen 1 (bei g) oder den Nutzen 0 (bei l).

Ein möglicher Nutzen-Strom: 5, 0, 1, 0, 1, 1, 1, ...

Der beste Nutzen-Strom: 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

Trigger-Strategien im Gefangenen Dilemma

		(2)	
		<i>g</i>	<i>l</i>
(1)	<i>g</i>	1 , 1	5 , 0
	<i>l</i>	0 , 5	4 , 4

Angenommen, (2) folgt der Trigger-Strategie.

Falls (1) in Stufe 1 abweicht und *g* wählt, so beträgt das Nutzenmaximum:

$$5 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + \delta^3 \cdot 1 + \dots = 5 + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t = 5 + \frac{\delta}{1 - \delta}$$

Trigger-Strategien im Gefangenen Dilemma

		(2)	
		<i>g</i>	<i>l</i>
(1)	<i>g</i>	1 , 1	5 , 0
	<i>l</i>	0 , 5	4 , 4

Angenommen, (2) folgt der Trigger-Strategie.

Falls (1) in allen Stufen *l* wählt, beträgt ihr diskontierter Gesamtnutzen:

$$4 + \delta \cdot 4 + \delta^2 \cdot 4 + \delta^3 \cdot 4 + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot 4 = 4 \cdot \frac{1}{1 - \delta}$$

Trigger-Strategien im Gefangenen Dilemma

„Immer /“ ist besser als Abweichen von Trigger-Strategie in der ersten Stufe, falls

$$4 \cdot \frac{1}{1-\delta} > 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow 4 > 5(1-\delta) + \delta \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{4}$$

Falls also (2) der Trigger-Strategie folgt und die Zukunft wertvoll oder wahrscheinlich genug ist ($\delta > \frac{1}{4}$), wählt (1) in Stufe 1 /.

Trigger-Strategien im Gefangenen Dilemma

In Stufe 2 sieht sich (1) aber dem identischen Entscheidungsproblem gegenüber: Sie vergleicht den Auszahlungsstrom

$$5, 1, 1, 1, \dots$$

mit

$$4, 4, 4, 4, \dots$$

und entscheidet sich auch in Stufe 2 für I .

Dieses Argument lässt sich für jede Stufe t wiederholen, falls in den Stufen 1 bis $t - 1$ (I, I) gespielt wurde.

Die Begründung aus Sicht von (2) erfolgt analog.

Für $\delta > \frac{1}{4}$ lässt sich also „Immer I “ als teilspielperfektes Ergebnis implementieren.

Unendlich oft wiederholtes Bertrand Duopol

Spieler:innen

Firmen 1 und 2, jeweils mit konstanten Stückkosten 4 und Diskontierungsfaktor $\delta \in (0, 1)$.

Nachfragefunktion (für $0 \leq p_i, p_j \leq 34$)

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 34 - p_i & \text{falls } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(34 - p_i) & \text{falls } p_i = p_j \\ 0 & \text{falls } p_i > p_j \end{cases}$$

Monopolpreis

$$p^M = 19$$

Bertrand Gleichgewichtspreis

$$p^B = 4$$

Unendlich oft wiederholtes Bertrand Duopol

Stufenspiel

Beide Firmen wählen simultan p_1 und p_2 .

Daraus resultieren die nachgefragten Mengen $D_1(p_1, p_2)$ und $D_2(p_1, p_2)$ und die Gewinne

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - 4)D_1(p_1, p_2) \text{ und } \pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - 4)D_2(p_1, p_2)$$

Betrachte für einen beliebigen Preis $p^0 \in [4, 19]$ folgende

Trigger-Strategie:

„Spiele p^0 in der ersten Stufe und falls alle in den vorherigen Stufen p^0 gespielt haben. Sonst spiele für immer $p = 4$.“

Behauptung

„Immer p^0 “ kann als teilspielperfektes Ergebnis durch diese Trigger-Strategie implementiert werden, falls $\delta > \frac{1}{2}$.

Unendlich oft wiederholtes Bertrand Duopol

Angenommen, Firma 2 folgt der Trigger-Strategie.

Definiere:

$$\pi^0 := (p^0 - 4) \frac{1}{2} (34 - p^0)$$

Diskontierter Nutzen von „immer p^0 “ für Firma 1:

$$\pi^0 + \delta \pi^0 + \delta^2 \pi^0 + \dots = \pi^0 \frac{1}{1 - \delta}$$

Betrachte ein Abweichen auf $\hat{p} = p^0 - \epsilon$ für $\epsilon > 0$ beliebig klein in Stufe 1:

$$\hat{\pi} = (p^0 - \epsilon - 4)(34 - p^0 + \epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2 \cdot \pi^0$$

Ab Stufe 2 würde wegen $p_2 = 4$ der Gewinnstrom $0, 0, \dots$ folgen.

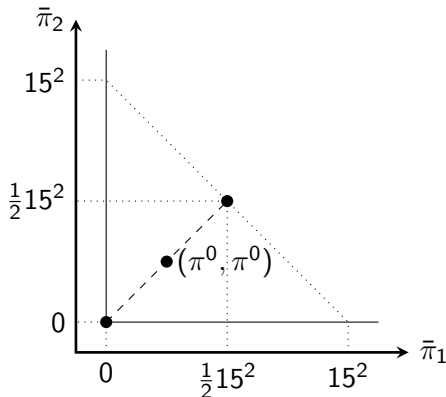
Diskontierter Nutzen von „Abweichen“ für Firma 1:

$$2 \cdot \pi^0 + \delta \cdot 0 + \delta^2 \cdot 0 + \dots = 2 \cdot \pi^0$$

Unendlich oft wiederholtes Bertrand Duopol

Der Preis $p^0 \in [4, 19]$ lässt sich als teilspielperfektes Ergebnis im unendlich oft wiederholten Bertrand Duopol stützen, falls

$$\pi^0 \frac{1}{1 - \delta} > 2\pi^0 \Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2}$$



„Durchschnittliche
Zahlungsströme“:
 $\bar{\pi} = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi^t$

Unendlich oft wiederholtes Cournot Duopol

Spieler:innen

Firmen 1 und 2, jeweils mit konstanten Stückkosten 4 und Diskontierungsfaktor $\delta \in (0, 1)$.

inverse Nachfragefunktion (für $q_i, q_j \geq 0$)

$$P(q_i, q_j) = \begin{cases} 34 - q_i - q_j & \text{falls } q_i + q_j \leq 34 \\ 0 & \text{falls } q_i + q_j > 34 \end{cases}$$

Monopolmenge

$$Q^M = 15$$

Cournot Gleichgewichtsmenge

$$q^C = 10$$

Unendlich oft wiederholtes Cournot Duopol

Stufenspiel

Beide Firmen wählen simultan q_1 und q_2 .

Analog zum Gefangenen Dilemma und zum Bertrand Duopol suchen wir nun eine untere Schranke für δ , sodass die Firmen in einem teilspielperfekten Ergebnis jeweils die halbe Monopolmenge spielen.

Trigger-Strategie:

Sie spielen in der ersten Stufe $q_i^M = 7.5$. Falls bis Stufe t beide Firmen q_i^M gewählt haben, spielen auch in Stufe $t + 1$. Andernfalls, spielen $q_i = q^C = 10$.

Unendlich oft wiederholtes Cournot Duopol

Angenommen, F_2 folge der Trigger-Strategie.

Falls F_1 ebenfalls der Trigger-Strategie folgt, so spielen beide Firmen q_i^M in jeder Stufe des Spiels und erzielen jeweils den Profit-Strom

$$\frac{1}{2}\pi^M + \delta\frac{1}{2}\pi^M + \delta^2\frac{1}{2}\pi^M + \dots = \frac{1}{2}\pi^M \frac{1}{1-\delta}$$

Falls F_1 in Stufe 1 abweicht und hierdurch π^d (d=deviation) erzielt, wird sie in allen Folgestufen durch π^C „bestraft“ und erzielt den Profit Strom

$$\pi^d + \delta\pi^C + \delta^2\pi^C + \dots = \pi^d + \pi^C \frac{\delta}{1-\delta}$$

Die Trigger-Strategie führt zu einem teilspielperfekten Ergebnis, falls

$$\frac{1}{2}\pi^M \frac{1}{1-\delta} > \pi^d + \pi^C \frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta > \frac{\frac{1}{2}\pi^M - \pi^d}{\pi^C - \pi^d}$$

Unendlich oft wiederholtes Cournot Duopol

Mit $\frac{1}{2}Q^M = 7.5$, $q^C = 10$,

$$\begin{aligned}\pi^M &= 15^2 \\ \pi^C &= 10^2 = \frac{4}{9} \cdot 15^2\end{aligned}$$

und

$$\pi^d = \max_{q_i \geq 0} (34 - q_i - 7.5)q_i - 4 \cdot q_i = \dots = \frac{9}{16} \cdot 15^2$$

ergibt sich als untere Schranke für δ :

$$\delta > \frac{\frac{1}{2}\pi^M - \pi^d}{\pi^C - \pi^d} = \frac{9}{17}$$

Unendlich oft wiederholte Spiele: der allgemeine Fall

Definition

Für ein gegebenes Stufenspiel G sei $G(\infty, \delta)$ das **unendlich oft wiederholte Spiel** in welchem G für immer wiederholt wird und alle Spieler:innen den Diskontierungsfaktor $\delta \in (0, 1)$ haben.

Für jedes t beobachten alle Spieler:innen das Spielergebnis der vergangenen $t - 1$ Stufen bevor die Stufe t beginnt.

Die Auszahlungen von $G(\infty, \delta)$ entsprechen dem diskontierten Gegenwartswert der unendlichen Folge von Stufenspielen.

Definition: Strategie

Eine **Strategie** eines Spieler:in ist ein vollständiger Plan von Aktionen. Eine Strategie spezifiziert eine mögliche Aktion für jede mögliche Situation, in welcher sich der/die Spieler:in befinden kann.

In Normalform-Spielen aus Kapitel 1:

Eine Strategie für Spieler:innen i entspricht einer Entscheidungsmöglichkeit aus S_i – wir haben dies bereits Strategie genannt.

In wiederholten Spielen aus Kapitel 2:

Eine Strategie für Spieler:innen i entspricht einer Entscheidungsmöglichkeit aus S_i ; **jedes Stufenspiels** für **jeden möglichen Verlauf** des Spiels bis zu dem jeweiligen Stufenspiel.

Wir bezeichnen einen möglichen Verlauf des Spiels bis Stufe t auch als **Geschichte** des Spiels.

Strategien im zweistufigen Gefangenen Dilemma

Im zweistufigen Gefangenen Dilemma gibt es fünf Situationen, in welchen Spieler 1 entscheiden muss:

Stufe I	Stufe II	Stufe II	Stufe II	Stufe II
zu Beginn	nach (g, g)	nach (g, l)	nach (l, g)	nach (l, l)

Für jede dieser Möglichkeiten (Geschichten) spezifiziert eine Strategie eine Entscheidung (Aktion) aus $\{l, g\}$.

Strategien im zweistufigen Gefangenen Dilemma

Eine Strategie von Spieler 1 ist also ein Vektor

$$\left(a_1^I, a_1^{II}(g, g), a_1^{II}(g, l), a_1^{II}(l, g), a_1^{II}(l, l) \right)$$

wobei alle Komponenten des Vektors aus $\{g, l\}$ sind.

Zum Beispiel lautet die Strategie „Spiele l in Stufe I und g in Stufe II (egal was in Stufe I passiert)“:

$$(l, g, g, g, g)$$

Es gibt insgesamt $2^5 = 32$ verschiedene Strategien!

Strategien im unendlichen Gefangenen Dilemma

Definiere $H_t = (\{g, l\} \times \{g, l\})^t$ als die Menge aller möglichen Spielverläufe (Geschichten) bis einschließlich Stufe t .

Es bezeichne $h_t \in H_t$ eine konkrete Geschichte des Spiels bis einschließlich Stufe t .

Die Geschichte h_t ist das Protokoll der Entscheidungen beider Spieler:innen in den Stufen 1 bis t .

Da vor Stufe 1 noch nichts passiert ist, definieren wir die „leere Geschichte“ $h_0 = \emptyset$, $H_0 = \{\emptyset\}$.

Eine **Strategie** für Spieler:in i im unendlich oft wiederholten Gefangenen Dilemma spezifiziert für jede mögliche Geschichte in jeder Stufe des wiederholten Spiels eine mögliche Aktion:

$$s_i : \bigcup_{t=0}^{\infty} H_t \rightarrow \{g, l\}$$

(Eine) Trigger-Strategie im unendl. Gefangenen Dilemma

Es bezeichne h_t^I die Geschichte, in welcher beide Spieler:innen in jeder Stufe bis einschließlich Stufe t die Aktion $a_i^t = I$ wählen.

Dann lautet eine Trigger-Strategie zum Beispiel

$$s_i^{tr} : \bigcup_{t=0}^{\infty} H_t \rightarrow \{g, I\}$$

mit

$$\begin{aligned} s_i^{tr}(\emptyset) &= I \\ s_i^{tr}(h_t) &= \begin{cases} I & \text{falls } h_t = h_t^I \\ g & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Definition: Teilspiele in wiederholten Spielen

Im endlich oft wiederholten Spiel $G(T)$ ist das wiederholte Spiel, welches ab Stufe $t + 1$ beginnt und das Stufenspiel $T - t$ oft wiederholt, ein **Teilspiel** von $G(T)$. Dieses Teilspiel wird mit $G(T - t)$ bezeichnet.

Im unendlich oft wiederholten Spiel $G(\infty, \delta)$ ist das wiederholte Spiel, welches ab Stufe $t + 1$ beginnt, ein Teilspiel von $G(\infty, \delta)$. Es ist identisch zu $G(\infty, \delta)$!

Für jede Geschichte in H_t gibt es genau ein Teilspiel.

Beachte:

Eine Stufe $t < T$ für sich betrachtet ist kein eigenes Teilspiel!

Definition: Teilspielperfektes Gleichgewicht

Reinhard Selten (1975) „Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games“ *International Journal of Game Theory* 4

Ein Nash Gleichgewicht heißt **teilspielperfekt** (tsp NGG), falls die Strategien der Spieler:innen ein Nash Gleichgewicht in jedem Teilspiel konstituieren.

Bisher benannten wir lediglich das teilspielperfekte Ergebnis eines Spiels: die aus einem tsp NGG resultierende Geschichte.

Wir nennen das teilspielperfekte Ergebnis daher auch den **Gleichgewichtspfad**.

Das tsp NGG beinhaltet wesentlich mehr Informationen:

Die Entscheidungen der Spieler:innen in allen Teilspielen, welche im Gleichgewicht nicht erreicht werden.

Diskussion: Teilspielperfektes Gleichgewicht

Das tsp NGG ist eine **Verfeinerung** (refinement) des Nash Gleichgewichtes:

Jedes tsp NGG ist ein Nash Gleichgewicht!

Die Umkehrung gilt nicht:

Nicht jedes Nash Gleichgewicht ist auch ein tsp NGG.

Aufgabe:

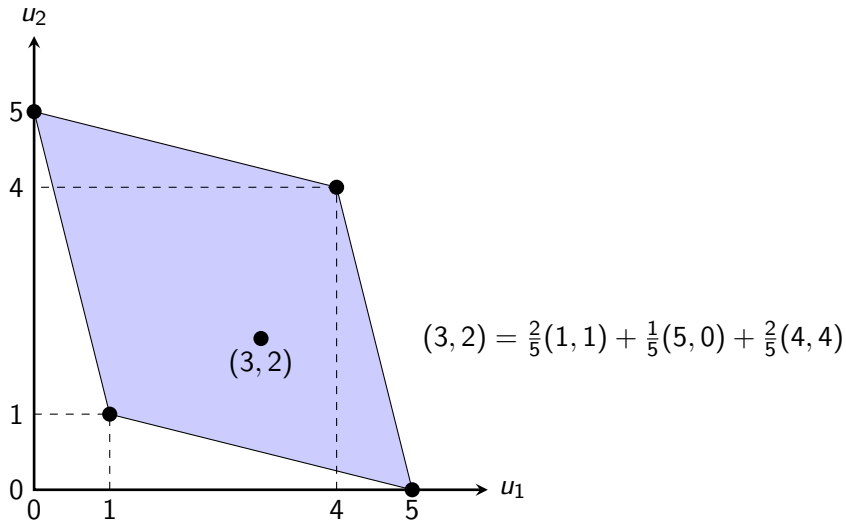
Suche ein Nash Gleichgewicht im zweistufigen Gefangenem Dilemma, welches kein tsp NGG ist!

Definition: Erreichbare Auszahlungen

Für ein Stufenspiel G mit n Spieler:innen heißt der Auszahlungsvektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ **erreichbar**, falls \mathbf{u} als Konvexkombination von Auszahlungsvektoren der n Spieler:innen bei beliebigen reinen Strategien darstellbar ist.

Eine Konvexkombination von zwei oder mehr Vektoren ist die gewichtete Summe dieser Vektoren, wobei Gewichte nicht negativ sind und sich auf eins summieren.

Erreichbare Auszahlungen im Gefangenenen Dilemma



Definition: Durchschnittlicher Gegenwartswert

Für einen gegebenen Diskontierungsfaktor $\delta \in (0, 1)$ und einen unendlichen Auszahlungsstrom u_1, u_2, u_3, \dots heißt

$$(1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot u_t$$

die **durchschnittliche Auszahlung**.

Im unendlich oft wiederholten Gefangenen Dilemma führt das teilspielperfekte Ergebnis $(I, I), (I, I), (I, I), \dots$ zum unendlichen Auszahlungsstrom $4, 4, 4, \dots$. Die durchschnittliche Auszahlung ist dann

$$(1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \cdot 4 = (1 - \delta) \cdot 4 \cdot \frac{1}{1 - \delta} = 4$$

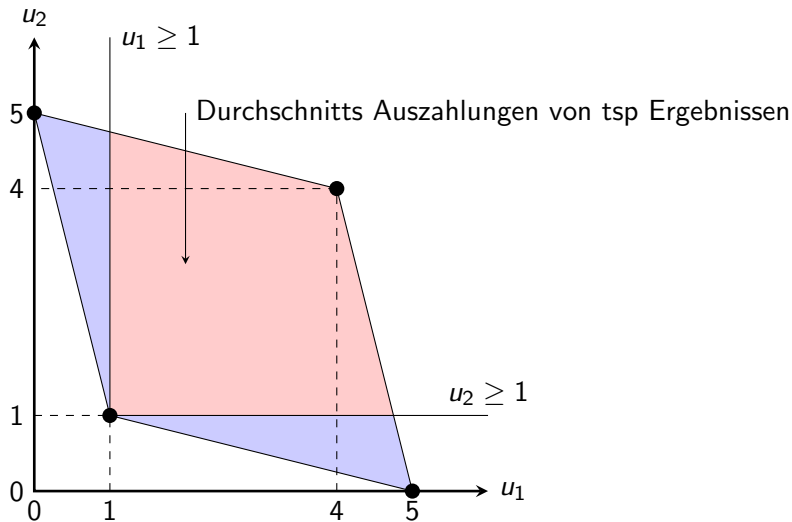
Theorem („Folk-Theorem“, Friedmann 1971)

Es sei G ein endliches simultanes n -Spieler:innen Spiel mit Auszahlungsvektor $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ in einem Nash Gleichgewicht von G .

Sei $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ein erreichbarer Auszahlungsvektor mit $u_i \geq e_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und sei $\delta \in (0, 1)$ nahe genug an 1.

Dann existiert ein tsp NGG des unendlich oft wiederholten Spiels $G(\infty, \delta)$ derart, dass die durchschnittliche Auszahlung dieses Gleichgewichts gleich (u_1, \dots, u_n) ist.

Gefangenen Dilemma: Folk Theorem



Schlüsselwörter aus Kapitel 2.3

- ▶ Stufenspiel
- ▶ Endlich oft wiederholtes Spiel
- ▶ teilspielperfekte Drohung und Belohnung
- ▶ Unendlich oft wiederholtes Spiel
- ▶ Diskontierung
- ▶ Trigger-Strategie
- ▶ Geschichten und Strategien
- ▶ Teilspiel im wiederholten Spiel
- ▶ Teilspielperfektes Nash Gleichgewicht
- ▶ Folk Theorem

Dynamische Spiele unter vollständiger aber unvollkommener Information

Es gibt noch Spiele unter vollständiger Information, für deren Analyse die bisher vorgestellten Methoden nicht ausreichen.

In Unterkapitel 2.4 stellen wir nun einige solcher Spiele vor, um beispielhaft deren Lösung zu erklären.

Wir verzichten in 2.4. auf eine allgemeine formale Darstellung solcher Spiele.

Normalform und Extensivform

Normalform:

Simultane Entscheidung

Was wäre die optimale Antwort, wenn die anderen Spieler:innen eine bestimmte Strategie wählen würden?

I.d.R.: Matrixdarstellung

$$G = \{N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\}$$

Extensivform:

Sequenzielle Entscheidung

Was ist die optimale Antwort, wenn die anderen Spieler:innen eine beste Antwort spielen werden?

I.d.R.: Baumdarstellung

$$G = ?$$

Definition: Spiel in Extensiv-Form

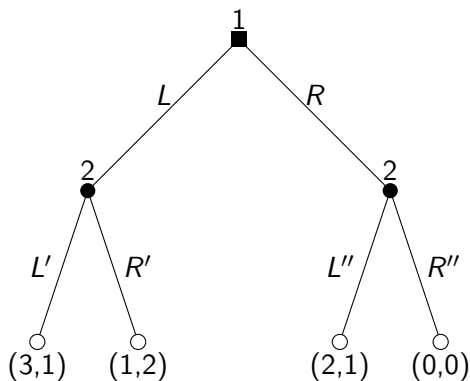
Die **Extensiv-Form** Representation eines Spiels spezifiziert:

- (1) die Spieler:innen
- (2a) Wann jede:r Spieler:in „dran“ ist
- (2b) Was jede:r Spieler:in tun kann, wenn er/sie dran ist
- (2c) Was jede:r Spieler:in weiß, wenn er/sie dran ist
- (3) Die Auszahlung jedes/r Spielers/in, für jede Möglichkeit des Spielausgangs

Zweistufiges Spiel mit vollständiger und vollkommener Info

1. Spieler 1 wählt Aktion a_1 aus der Menge $A_1 = \{L, R\}$.
2. Spielerin 2 beobachtet a_1 und wählt dann Aktion a_2 aus der Menge $A'_2 = \{L', R'\}$, falls $L \in A_1$ beobachtet wurde oder eine Aktion a_2 aus der Menge $A''_2 = \{L'', R''\}$, falls $R \in A_1$ beobachtet wurde.
3. Die Auszahlungen der Spieler:innen sind $u_1(a_1, a_2)$ und $u_2(a_1, a_2)$.

Zweistufiges Spiel mit vollständiger und vollkommener Info



Aktionen und Strategien

Aktionen

Aktionen sind die einem/r Spieler:in zur Verfügung stehenden Entscheidungsmöglichkeiten in einem bestimmten Entscheidungsknoten.

Strategien

Eine Strategie ist ein vollständiger Plan von Aktionen eines/r Spielers/in (eine Aktion für jeden Entscheidungsknoten des/r Spielers/in, der unterscheidbar ist).

Die Strategien von Spieler 1 im Beispiel

Nur ein Entscheidungsknoten: Der Beginn des Spiels.

Strategien von Spieler 1 = Aktionen von Spieler 1 zu Beginn des Spiels = $A_1 = \{L, R\}$

Die Strategien von Spielerin 2 im Beispiel

Zwei Entscheidungsknoten mit je zwei Aktionen.

Strategie 1:

Falls Spieler 1 L wählt \rightarrow spiele L' ; falls Spieler 1 R wählt $\rightarrow L''$.

Kurzbezeichnung: $(L' L'')$

Strategie 2:

Falls Spieler 1 L wählt \rightarrow spiele L' ; falls Spieler 1 R wählt $\rightarrow R''$.

Kurzbezeichnung: $(L' R'')$

Strategie 3:

Falls Spieler 1 L wählt \rightarrow spiele R' ; falls Spieler 1 R wählt $\rightarrow L''$.

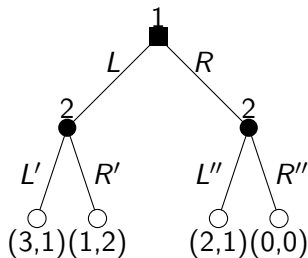
Kurzbezeichnung: $(R' L'')$

Strategie 4:

Falls Spieler 1 L wählt \rightarrow spiele R' ; falls Spieler 1 R wählt $\rightarrow R''$.

Kurzbezeichnung: $(R' R'')$

Extensivform \rightarrow Normalform im Beispiel



		2			
		$L'L''$	$L'R''$	$R'L''$	$R'R''$
1	L	3 , 1	3 , 1	1 , 2	1 , 2
	R	2 , 1	0 , 0	2 , 1	0 , 0

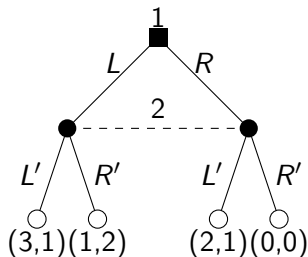
Reine Nash Gleichgewichte:

Simultane Entscheidungen

Was wäre, wenn Spielerin 2 die Entscheidung von Spieler 1 nicht beobachten könnte?

Sie könnte dann die beiden Entscheidungsknoten, in welchen sie dran ist, nicht unterscheiden.

Wir kennzeichnen dies mit einer gestrichelten Linie:



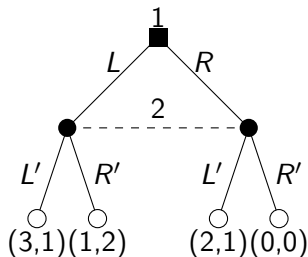
Die beiden Entscheidungsknoten von Spielerin 2 bilden nun eine **Informationsmenge**.

Definition: Informationsmenge

Eine **Informationsmenge** eines/r Spielers/in ist eine Menge von Entscheidungsknoten, für welche gilt:

- (i) Der/die Spieler:in ist an jedem Knoten der Informationsmenge dran.
- (ii) Falls die Informationsmenge erreicht wird, weiß der/die Spieler:in, welche:r dran ist, nicht welcher der Knoten in der Informationsmenge erreicht wurde.

Aus (ii) folgt, dass die verfügbaren Aktionen in jedem Knoten einer Informationsmenge übereinstimmen müssen.



Da Spielerin 2 ihre Entscheidungsknoten nicht unterscheiden kann, muss sie in jedem dieser Knoten die gleiche Aktion wählen.

In diesem Spiel hat sie also nicht vier, sondern nur zwei Strategien: L' und R'

Definition: Spiel mit (un)vollkommener Information

Ein Spiel hat die Eigenschaft **vollkommene Information**, falls für alle Spieler:innen alle Informationsmengen jeweils nur aus einem Entscheidungsknoten bestehen.

Ein Spiel hat die Eigenschaft **unvollkommene Information**, falls mindestens eine:n Spieler:in gibt, die eine Informationsmenge mit mindestens zwei Knoten besitzt.

In der Spielbaumdarstellung erkennt man ein Spiel unvollkommener Information an der grafischen Darstellung von Informationsmengen mit mehreren Knoten: den gestrichelten Linien.

Seltens Pferd

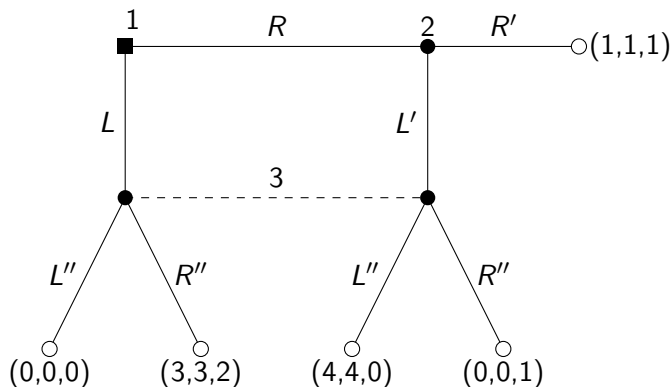
Mit dem Konzept der Informationsmenge können wir kompliziertere Spiele darstellen:

1. Spieler 1 wählt a_1 aus $A_1 = \{L, R\}$
2. Spielerin 2 beobachtet a_1 und wählt a_2 aus $A_2 = \{L', R'\}$, falls $a_1 = R$
3. Spieler 3 beobachtet, ob $(a_1, a_2) \neq (R, R')$ und wählt daraufhin a_3 aus $A_3 = \{L'', R''\}$

In diesem Spiel kann sich Spieler 3 zwar in zwei verschiedenen Entscheidungsknoten befinden, er kann sie aber nicht unterscheiden.

Er muss daher in beiden Knoten die gleiche Aktion wählen.

Seltens Pferd



Wenn Spieler 3 an der Reihe ist, muss er vermuten in welchem der beiden Knoten er sich befindet. Ist diese Vermutung wichtig?

Gibt es ein oder mehrere Nash Gleichgewichte? Welche(s)?

Definition: Teilspiel in Extensiv-Form Spielen

Ein **Teilspiel** in einem Extensiv-Form Spiel

- (a) beginnt in einem Entscheidungsknoten dessen Informationsmenge einelementig ist,
- (b) enthält alle Knoten, die diesem Entscheidungsknoten im Spielbaum folgen und
- (c) trennt keine Informationsmengen.

Bemerkung:

Das Extensiv-Form Spiel selbst ist auch ein Teilspiel. (Im Gegensatz zur Definition im Buch, das ist aber nicht wichtig.)

Welche Teilspiele hat Seltens Pferd?

Definition: Teilspielperfektes Nash Gleichgewicht in Extensiv-Form Spielen (Selten 1975)

Wir können nun die Definition des tsp NGG aus Unterkapitel 2.3 unverändert auf Spiele in extensiv-Form anwenden:

Ein Nash Gleichgewicht ist **teilspielperfekt (tsp)**, wenn die Strategien der Spieler:innen ein Nash Gleichgewicht in jedem seiner Teilspiele konstituieren.

Unterschied von teilspielperfekten Ergebnis und tsp NGG

Das **teilspielperfekte Ergebnis** sind die Aktionen, die in den Entscheidungsknoten gewählt werden, die im teilspielperfekten Gleichgewicht erreicht werden: der Gleichgewichtspfad.

Das **teilspielperfekte Nash Gleichgewicht** spezifiziert zusätzlich die Aktionen in allen Entscheidungsknoten, die nicht erreicht werden.