Einführung in die Spieltheorie

Sommersemester 2025

Dr. Lars Metzger
Fakultät Wirtschaftswissenschaften
TU Dortmund

Was ist Spieltheorie?

Die Spieltheorie ist eine Methode zur Analyse strategischer Interaktionen von rationalen Individuen.

Strategische Interaktion bedeutet, dass die Ergebnisse von den Aktionen aller Akteure abhängen.

Ziele der Spieltheorie:

- (positiv:) Wie **werden** sich rationale Akteure verhalten?
- (normativ:) Wie **sollen** sich die Akteure verhalten?

Nach diesem Semester könnt ihr:

komplexe ökonomische Probleme ...

- strukturell einordnen,
- auf essentielle Bestandteile reduzieren,
- formal darstellen,
- und lösen.

Eine Lösung besteht aus einer Beschreibung, wie sich rationale Akteure entscheiden und wie sie sich aus gemeinschaftlicher Perspektive entscheiden sollten.

Wir *designen* Probleme so, dass sich rationale Akteure so entscheiden, wie sie sich entscheiden sollten.

Lehrbuch

Die Vorlesung basiert zu großen Teilen auf dem Lehrbuch von:

Robert Gibbons, „A Primer in Game Theory“

Dieses Lehrbuch ist in englischer Sprache erschienen.

Ebenfalls exzellent:

Holler, Illing, Napel: „Einführung in die Spieltheorie“

Allerdings: Die didaktische Struktur ist anspruchsvoller.

Dieses Buch ist zu empfehlen, wenn die Vorlesung bereits gehört wurde.

Am Ende der Vorlesung werden weiterführende (englische) Fachbücher vorgestellt.

Inhaltlicher Überblick

- **Kapitel 1**

  Statische Spiele unter vollständiger Information

- **Kapitel 2**

  Dynamische Spiele unter vollständiger Information

- **Kapitel 3**

  Statische Spiele unter unvollständiger Information

Das Thema

- **Kapitel 4**

  Dynamische Spiele unter unvollständiger Information

wird in dieser einführenden Vorlesung nicht behandelt.

Anwendungen von Kapitel 1

Statische Spiele unter vollständiger Information

In **statischen** Spielen entscheiden alle Akteure gleichzeitig.

Unter **vollständiger** Information kennen alle Akteure die Ziele aller anderen Akteure.

Wir untersuchen in diesem Kapitel:

- das Gefangenen Dilemma
- Koordinierungsspiele
- den Beauty Contest
- Cournot und Betrand Oligopole
- die private Bereitstellung öffentlicher Güter
- Wettstreite

Anwendungen von Kapitel 2

Dynamische Spiele unter vollständiger Information

In **dynamischen** Spielen entscheiden die Akteure nacheinander.

Unter **vollständiger** Information kennen alle Akteure die Ziele aller anderen Akteure.

Wir untersuchen in diesem Kapitel:

- das Stackelberg Duopol
- das Rubinstein-Verhandlungsspiel
- Bank Runs
- Zölle und Wettbewerb
- nochmal das Gefangenen Dilemma
- ... und weitere Probleme

Anwendungen von Kapitel 3

Statische Spiele unter unvollständiger Information

In **statischen** Spielen entscheiden alle Akteure gleichzeitig.

Unter **unvollständiger** Information kennen manche Akteure die Ziele mancher anderen Akteure nicht.

Wir untersuchen in diesem Kapitel:

- Erst- und Zweitpreis Auktionen
- Doppelte Auktionen
- Korreliertes Gleichgewicht
- Cournot Oligopol mit asymmetrischer Information

Materialien

Alle Vorlesungsfolien und Übungsaufgaben, sowie die Vorlesungen und Übungen bedienen sich der deutschen Sprache.

Alle Materialen und Notizen werden über Moodle bereitgestellt.

→ moodle.tu-dortmund.de/course/view.php?id=33150

Die Vorlesungen und Übungen werden gestreamt und aufgezeichnet und stehen Euch als Videos zur Verfügung.

→ youtube.com/@larsmetzger

Statische Spiele unter vollständiger Information

Moodle

Kapitel 1: Statische Spiele unter vollständiger Information

statisch:

Die Akteure wählen die Aktionen gleichzeitig und einmalig.

vollständige Information:

Jeder Akteur kennt die Auszahlungsfunktion aller Akteure.

Dynamische oder *sequentielle Spiele* $\rightarrow$ Kapitel 2 und 4

Spiele mit unvollständiger Information $\rightarrow$ Kapitel 3 und 4

Das Gefangenen Dilemma

Luce & Raiffa (1957) S. 95, Übersetzung nach Holler, Illing & Napel (2019)

Zwei Verdächtige werden in Einzelhaft genommen. Der Staatsanwalt ist sich sicher, dass sie beide eines schweren Verbrechens schuldig sind, doch verfügt er über keine ausreichenden Beweise, um sie vor Gericht zu überführen. Er weist jeden Verdächtigen darauf hin, dass er zwei Möglichkeiten hat: das Verbrechen zu gestehen oder aber nicht zu gestehen. Wenn beide nicht gestehen, dann, so erklärt der Staatsanwalt, wird er sie wegen ein paar minderer Delikte wie illegalem Waffenbesitz anklagen, und sie werden eine geringe Strafe bekommen. Wenn beide gestehen, werden sie zusammen angeklagt, aber er wird nicht die Höchststrafe beantragen. Macht einer ein Geständnis, der andere jedoch nicht, so wird der Geständige nach kurzer Zeit freigelassen, während der andere die Höchststrafe erhält.

Beispiel: Das Gefangenen Dilemma

<u>Gestehen</u>

Vorteile

Nachteile

<u>Leugnen</u>

Vorteile

Nachteile

Beispiel: Das Gefangenen Dilemma

A

ich: leugne
die andere: leugnet

1 Monat für mich
1 Monat für die andere

B

ich: leugne
die andere: gesteht

9 Monate für mich
0 Monate für die andere

C

ich: gestehe
die andere: leugnet

0 Monate für mich
9 Monate für die andere

D

ich: gestehe
die andere: gesteht

6 Monate für mich
6 Monate für die andere

Forschungsfragen

- Wie werden die vier Zustände gereiht?
- Welche Reihung der vier Zustände ist rational?
- Wie entscheiden sich rationale Akteure?
- Wie sollten sie sich entscheiden?

Grundlegende Begriffe

Rationale Präferenzen und Spieler:innen

Eine **Präferenzordnung** $\succsim$ über eine Menge von Zuständen (wie z.B. A, B, C und D) **ist rational**, falls

- jede zwei Zustände mit $\succsim$ verglichen werden können (Vollständigkeit)
- aus $X \succsim Y$ und $Y \succsim Z$ folgt $X \succsim Z$ (Transitivität)

Eine **Spieler:in ist rational**, falls sie sich gemäß ihrer Präferenzordnung entscheidet.

Über die Zustände A, B, C, D gibt es $\boxed{}$ verschiedene rationale Präferenzordnungen!

Beispiel: Das Gefangenen Dilemma

Es gibt viele begründbare Präferenzordnungen über die vier Ausgänge des Spiels.

Das Spiel wird nicht nur durch die Spielregeln definiert, sondern ebenfalls durch die Präferenzordnungen der Spieler:innen.

Die Spieltheorie nimmt die Präferenzordnungen, genauso wie die Spielregeln, als gegeben an.

Das Spiel „Gefangenen Dilemma“ ist nun durch folgende Präferenzordnungen definiert:

Die Personen interessieren sich...

- nicht für die Zukunft. („One Shot Game“)
- nur für die eigene Zeit im Gefängnis. (Egoistische Akteure)

Bi-Matrix Darstellung

		Gefangene 2: leugnen	Gefangene 2: gestehen
Gefangene 1	leugnen	-1 , -1	-9 , 0
Gefangene 1	gestehen	0 , -9	-6 , -6

Die Zahlen in den Zellen der Bi-Matrix repräsentieren hier die **rationalen Präferenzen** der Spielerinnen.

Die jeweils linke Zahl steht für Gefangene 1 (Zeilenspielerin) und die jeweils rechte Zahl steht für Gefangene 2 (Spaltenspielerin).

Die Präferenzen sind: je länger Gefängnis, desto schlechter. Wenig eigene Zeit im Gefängnis ist einziges Ziel.

Analyse aus Sicht von Gefangener 1:

<u>Angenommen Nr. 2 leugnet:</u>

(1) kommt frei, falls sie gesteht und 1 Monat Gefängnis, falls sie leugnet.

$\Rightarrow$ gestehen besser.

<u>Angenommen Nr. 2 gesteht:</u>

(1) bekommt 6 Monate, falls sie gesteht und 9 Monate, falls sie leugnet.

$\Rightarrow$ gestehen besser.

Falls Gefangene 1 **rational**:

Gefangene 1 wird gestehen.

Analyse aus Sicht von Gefangener 2:

Gleiche Argumentation wie bei Gefangener 1

Falls Gefangene 2 **rational**:

Gefangene 2 wird gestehen.

$\longrightarrow$ einzige „Lösung“: (gestehen, gestehen)

Pareto Effizienz

Ein Zustand (z.B. der Ausgang eines Spiels) ist Pareto effizient, falls niemand besser gestellt werden kann, ohne einer anderen Person zu schaden.

Aus der Sicht der Gemeinschaft sind pareto ineffiziente Ausgänge nicht wünschenswert.

Welche Spielausgänge des Gefangenen Dilemmas sind Pareto effizient?

Worin besteht nun das Dilemma der Gefangenen?

Drei der vier Ausgänge des Spiels, nämlich (leugnen, gestehen), (gestehen, leugnen) und (leugnen, leugnen) sind **Pareto effizient**.

Die rationale Lösung des Spiels ist aber ausgerechnet das einzige Pareto ineffiziente Ergebnis!

Individuelles rationales und egoistisches Verhalten ist also nicht immer zum Wohle aller. ($\lightning$ Adam Smith)

Definition: Spiel in Normalform

Ein **Spiel in Normalform** spezifiziert

(1) die **Spieler:innen** $i = 1, \dots, n$

(2) die **Strategien** $s_i \in S_i$ für jede:n Spieler:in $i = 1, \dots, n$
wobei S_i die Menge aller möglichen Strategien bezeichnet
(Strategienraum für Spieler:in i)

(3) die **Auszahlungsfunktion** (payoff-function)
$u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ mit $u_i(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}$
(von Neumann-Morgenstern Nutzen)

$\Rightarrow \quad G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$

G ist **endlich**, falls $n < \infty$ und $|S_i| < \infty$ für $i = 1, \dots, n$.

Abkürzungen

Um bei $n > 2$ die Schreibweise zu vereinfachen, benutzen wir häufig:

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

$$S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$$

Grundlegende Begriffe: Dominiertheit

In manchen Spielen gibt es Strategien, die keine gute Wahl für den/die entsprechende Spieler:in sind.

Wenn eine Strategie s_i' schlechter für i ist als Strategie s_i'' **egal, wie sich die anderen Spieler:innen entscheiden**, dann wird die schlechtere Strategie s_i' durch die bessere Strategie s_i'' **dominiert**.

Wenn eine Strategie s_i'' alle anderen Strategien von i dominiert, dann ist die Strategie s_i'' **dominant**.

Ein:e rationale Spieler:in wählt keine dominierte Strategie, auch wenn sie nicht weiß, wie die anderen Spieler:innen entscheiden.

Definition: schwach & strikt dominiert / dominant

Es seien s_i' und s_i'' mögliche Strategien von Spieler:in i.

s_i' heißt **schwach dominiert von** s_i'', falls für alle $s_{-i} \in S_{-i}$ gilt:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \leq u_i(s_i'', s_{-i})$$

und $u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i})$ für mindestens ein $s_{-i} \in S_{-i}$.

s_i' heißt **strikt** dominiert, falls alle obigen Ungleichungen strikt sind.

s_i'' heißt schwach/strikt **dominant**, falls jede andere Strategie von s_i'' schwach/strikt dominiert wird.

Beispiel 1 zu strikt dominiert

	links	mitte	rechts
oben	– , 0	– , 2	– , 1
unten	– , 0	– , 1	– , 2

Beispiel 2 zu iteriert strikt dominiert

(2)

		links	mitte	rechts
(1)	oben	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	unten	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Beispiel 2 zu iteriert strikt dominiert

Falls (1) weiß, dass (2) rational ist, kann sie so tun, als ob folgendes Spiel gespielt wird:

		(2) links	mitte	~~rechts~~
(1)	oben	1 , 0	1 , 2	~~0 , 1~~
	unten	0 , 3	0 , 1	~~2 , 0~~

Beispiel 2 zu iteriert strikt dominiert

(2)

(1)		links	mitte	~~rechts~~
	oben	1 , 0	1 , 2	~~0 , 1~~
	~~unten~~	~~0 , 3~~	~~0 , 1~~	~~2 , 0~~

Iterierte Elimination strikt dominierter Strategien (IEsdS)

Die iterierte Elimination strikt dominierter Strategien führt in Beispiel 2 zu der einzig möglichen Lösung

(oben, mitte)

unter der Voraussetzung: **common knowledge of rationality**.

1. Jede:r weiß, dass jede:r andere rational ist.
2. Jede:r weiß, dass 1. wahr ist.
3. Jede:r weiß, dass 2. wahr ist.

   ...

Grundlegende Begriffe: Beste Antwort

Wenn eine Spieler:in davon ausgehen kann, dass sich alle anderen für eine ganz bestimmte Strategie entscheiden, kann diese:r Spieler:in in dieser Situation die beste Strategie gemäß seiner/ihrer Präferenzen wählen.

Diese Strategie nennen wir **beste Antwort** (auf die ganz bestimmten Strategien, für die sich die anderen entscheiden).

Je nachdem, wie sich die anderen entscheiden, kann die eigene beste Antwort also wechseln.

Die beste Antwort ist also immer in Bezug auf eine Entscheidung der anderen definiert.

Grundlegende Begriffe: Beste Antworten – Beispiel 3

(2)

		L	C	R
	T	0 , 4	4 , 0	5 , 3
(1)	M	4 , 0	0 , 4	5 , 3
	B	3 , 5	3 , 5	6 , 6

Ist eine linke Nutzenzahl unterstrichen, ist die jeweilige Zeile eine **beste Antwort** auf die entsprechende Spalte.

Ist eine rechte Nutzenzahl unterstrichen, ist die jeweilige Spalte eine **beste Antwort** auf die entsprechende Zeile.

Definition: Beste Antwort

Die Strategie $\hat{s}_i \in S_i$ heißt **beste Antwort** auf $s_{-i} \in S_{-i}$, falls

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für alle } s_i \in S_i \ .$$

Angenommen, die Spieltheorie liefert für eine Klasse von Spielen eine eindeutige Voraussage („Lösung“) $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, dann sollte gelten:

Für jede:n Spieler:in i ist die Wahl von s_i^* rational, gegeben s_{-i}^*.

$\rightarrow s_i^*$ ist eine beste Antwort auf s_{-i}^* für alle i.

Grundlegende Begriffe: Nash Gleichgewicht

Nash, John F. "Equilibrium points in n-person games." *Proceedings of the national academy of sciences* 36.1 (1950): 48-49.

Ein Profil von Strategien ist ein **Nash Gleichgewicht** (**NGG**), falls für jede:n Spieler:in die eigene Strategie eine beste Antwort auf die Strategien der jeweils anderen Spieler:innen ist.

In einem Nash Gleichgewicht hat kein:e Spieler:in den Anreiz von ihrer Entscheidung abzuweichen.

Definition: Nash Gleichgewicht

Ein Profil von Strategien $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ heißt

Nash Gleichgewicht des Spiels $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$,

falls für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ für alle $s_i \in S_i$.

Anmerkungen zu Nash Gleichgewicht

- Eine streng dominierte Strategie kann kein Teil eines NGGs sein.
- Eine dominante Strategie muss ein Teil eines NGGs sein.
- s_i^* löst $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$
- s_i^* ist beste Antwort auf s_{-i}^* für alle $i = 1, \ldots, n$

Grundlegende Begriffe: Nash Gleichgewicht – ein Beispiel

(2)

		L	C	R
	T	0 , $\underline{4}$	$\underline{4}$, 0	5 , 3
(1)	M	$\underline{4}$, 0	0 , $\underline{4}$	5 , 3
	B	3 , 5	3 , 5	$\underline{6}$, $\underline{6}$

Die Strategienkombination ist ein **Nash Gleichgewicht**.

Beispiel 4: 1Live oder eldoradio*?

Anne und Ben arbeiten im gleichen Zimmer an ihren Mikroaufgaben und hören dabei Radio.

Beide finden es besser den gleichen Sender zu hören als zwei verschiedene Sender gleichzeitig.

Anne bevorzugt 1Live gegenüber eldoradio* und Ben bevorzugt eldoradio* gegenüber 1Live.

		Ben	
		1L	e*
Anne	1L	2 , 1	0 , 0
	e*	0 , 0	1 , 2

Beispiel 5: Elfmeter (ohne Anlauf)

Strategien von Schützin (Spielerin 1):

$\{$schieße nach links, schieße nach rechts$\} \rightarrow \{\mathsf{l}, \mathsf{r}\}$

Strategien von Torwart (Spieler 2):

$\{$springe nach links, bleibe stehen, springe nach rechts$\} \rightarrow \{\mathsf{l}, \mathsf{m}, \mathsf{r}\}$

		Torwart		
		l	m	r
Schützin	r	1 , 0	1 , 0	0 , 1
	l	0 , 1	1 , 0	1 , 0

Zwei Schlussfolgerungen

Proposition A

Falls das Spiel $G = \{\ldots\}$ endlich ist und durch iterierte Elimination strikt dominierter Strategien nur $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ übrig bleibt, dann ist $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ das einzige Nash Gleichgewicht.

Proposition B

Falls $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ein Nash Gleichgewicht des Spiels $G = \{\ldots\}$ ist, so muss $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ nach iterierter Elimination strikt dominierter Strategien übrig bleiben.

Beweis B

Sei $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ein Nash Gleichgewicht.

Angenommen s^* überlebt nicht den Eliminationsprozess.

Dann sei s_i^* die <u>erste</u> Strategie, die eliminiert wird.

Dann muss s_i^* strikt dominiert sein, d.h. es gibt eine Strategie $s_i \in S_i$, sodass $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i})$ für alle s_{-i}, insbesondere für $s_{-i} = s_{-i}^*$.

Dann gilt: $u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$.

Aber dies widerspricht der Annahme, dass s^* ein Nash Gleichgewicht ist.

Beweis A

Angenommen, $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ sei die einzige überlebende Strategienkombination und s^* sei kein Nash Gleichgewicht.

Dann gibt es einen Spieler i mit einer Strategie s_i, so dass gilt:

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \qquad (*)$$

Nach Annahme wurde s_i irgendwann eliminiert, d.h. es gibt eine Strategie $s_i' \in S_i$, sodass $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in S_{-i}$, die zu diesem Zeitpunkt noch nicht eliminiert sind.

Da s_{-i}^* per Annahme nie eliminiert wird: $u_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

Fall I: $s_i' = s_i^*$; kann nicht sein, Widerspruch zu $(*)$.

Fall II: $s_i' \neq s_i^*$; dann wird s_i' irgendwann durch s_i'' eliminiert.

Wiederhole Beweis mit s_i' anstelle von s_i und mit s_i'' anstelle von s_i'.

Da S_i endlich: irgendwann Widerspruch.

Beispiel 6

Spieler 2 (Spalten), Spielerin 1 (Zeilen)

	l	r
o	1 , 2	0 , 1
m	1 , 0	1 , 1
u	0 , 1	2 , 0

Beispiel 6

		Spieler 2: l	Spieler 2: r
Spielerin 1	o	$\underline{1}$, $\underline{2}$	0 , 1
	m	$\underline{1}$, 0	1 , $\underline{1}$
	u	0 , $\underline{1}$	$\underline{2}$, 0

Das einzige Nash Gleichgewicht ist Teil einer schwach dominierten Strategie.

Eliminiert man schwach dominierte Strategien, können Nash Gleichgewichte verloren gehen.

Experiment: Beauty Contest

Nagel, Rosemarie. "Unraveling in guessing games: An experimental study." The American economic review 85.5 (1995): 1313-1326.

Alle Spieler:innen (Anzahl n) müssen simultan eine ganze Zahl zwischen 1 und 100 nennen.

Nachdem sich alle entschieden haben, wird der Durchschnitt $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$ berechnet.

Es gewinnt das Spiel, wer $\frac{2}{3}$ von $\bar{s}$ am nächsten ist.

Schlüsselwörter in Kapitel 1.1

- statisches Spiel unter vollständiger Information
- Gefangenen Dilemma
- Bi-Matrix / Auszahlungsmatrix
- rationale Spieler
- Spiel in Normalform
- (iteriert) strikt / schwach dominiert / dominant
- Common knowledge of rationality
- Beste Antworten
- Nash Gleichgewicht

Ökonomische Anwendungen

Experiment: Team-Spiel

Team: vier Personen, die sich nicht kennen. Alle Personen investieren gleichzeitig jeweils zwischen null und 20 Stunden in das Projekt.

Der Wert des Projektes hängt von der Summe aller Stunden ab: $4\sqrt{X+Y}$, wobei

- X: Anzahl der von dir investierten Stunden
- Y: Gesamtzahl der investierten Stunden der anderen

Dieser Wert ist in Einheiten von Stunden Freizeit gemessen.

Nettowert des Team-Projektes für dich:

$$4\sqrt{X+Y} - X$$

Wie viele Stunden X Deiner Freizeit möchtest Du in das Projekt investieren?

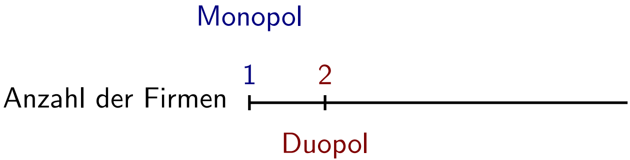
Oligopol:

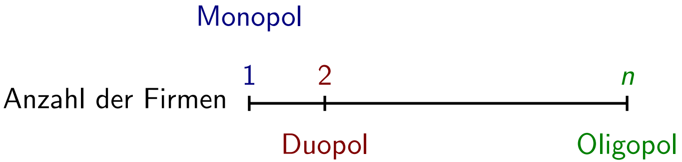
- Mehr als eine Firma ist am Markt aktiv.
- Es sind aber so wenige Firmen am Markt aktiv, dass jede einzelne Firma einen gewissen Einfluss auf den Marktpreis hat.Fokus

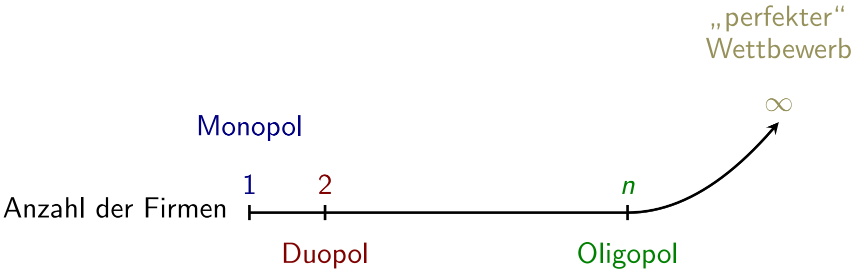
dieser Vorlesung:

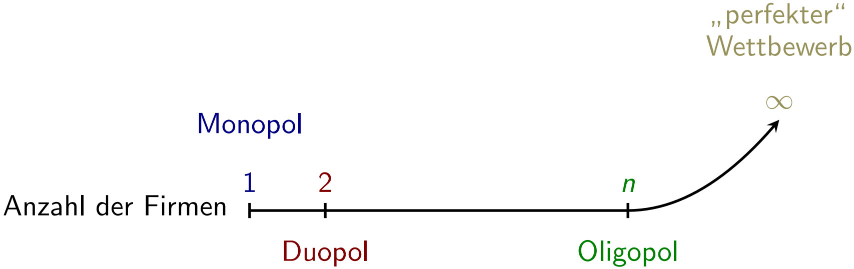
2 Firmen (Duopol)


Monopol
1
Anzahl der Firmen

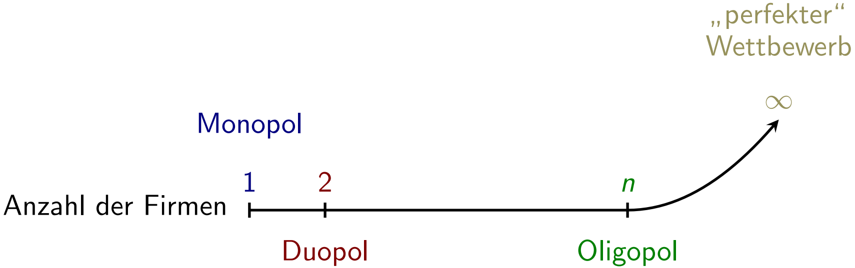

Monopol
1
2
Anzahl der Firmen
Duopol


Monopol
1
2
n
Anzahl der Firmen
Duopol
Oligopol


„perfekter“
Wettbewerb
∞
Monopol
1
2
n
Anzahl der Firmen
Duopol
Oligopol



Monopol & Wettbewerb: Extrem- oder Idealfälle



Monopol & Wettbewerb: Extrem- oder Idealfälle

Duopol bzw. Oligopol: realitätsnaher Fall

Duopol: fünf Fälle

	Entscheidungsvariable	
Entscheidungsreihenfolge		

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsvariable

	Preis	
Entscheidungsreihenfolge		

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsvariable

	Preis	Menge
Entscheidungsreihenfolge		

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsvariable

Entscheidungsreihenfolge	Preis	Menge
sequentiell		

Duopol: fünf Fälle

	Entscheidungsvariable	
	Preis	Menge
Entscheidungsreihenfolge: sequentiell		
Entscheidungsreihenfolge: simultan		

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsvariable

Entscheidungsreihenfolge	Preis	Menge
sequentiell		**Stackelberg**
simultan		

Duopol: fünf Fälle

	Entscheidungsvariable: Preis	Menge
Entscheidungsreihenfolge: sequentiell		**Stackelberg**
simultan		**Cournot**

Duopol: fünf Fälle

	Entscheidungsvariable	
	Preis	Menge
Entscheidungsreihenfolge: sequentiell		**Stackelberg**
Entscheidungsreihenfolge: simultan	**Bertrand**	**Cournot**

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsreihenfolge \ Entscheidungsvariable	Preis	Menge
sequentiell	**Preisführer**	**Stackelberg**
simultan	**Bertrand**	**Cournot**

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsreihenfolge \ Entscheidungsvariable	Preis	Menge
sequentiell	**Preisführer** *MC* konstant: $\rightarrow$ Bertrand	**Stackelberg**
simultan	**Bertrand**	**Cournot**

Duopol: fünf Fälle

		Entscheidungsvariable	
		Preis	Menge
Entscheidungsreihenfolge	sequentiell	**Preisführer** MC konstant: $\rightarrow$ Bertrand	**Stackelberg**
	simultan	**Bertrand**	**Cournot**

Kooperation der Firmen: **Kartell**

Einfache Parametrisierung

Inverse Nachfrage:

$$P(q_1 + q_2) = \max\{34 - q_1 - q_2, 0\}$$

Lineare Kostenfunktionen:

$$c(q_i) = 4 \cdot q_i \text{ für } i = 1, 2$$

Die Mengenentscheidungen beider Firmen beeinflussen den Marktpreis.

Somit hängt die Entscheidung der einen Firma von der Entscheidung der jeweils anderen Firma ab.

Referenzfälle

Referenzfall: Monopol

Es tritt nur eine Firma am Markt auf.

Das Maxmimierungsproblem lautet demnach:

$$\max_{q \geq 0} \, (34 - q) \cdot q - 4 \cdot q$$

Bedingung erster Ordnung:

Die Firma erzielt am Markt den Preis:

und generiert einen Gewinn in Höhe von:

Referenzfall: Wettbewerbsmarkt

Lineare Kostenfunktionen $c(q) = 4 \cdot q$

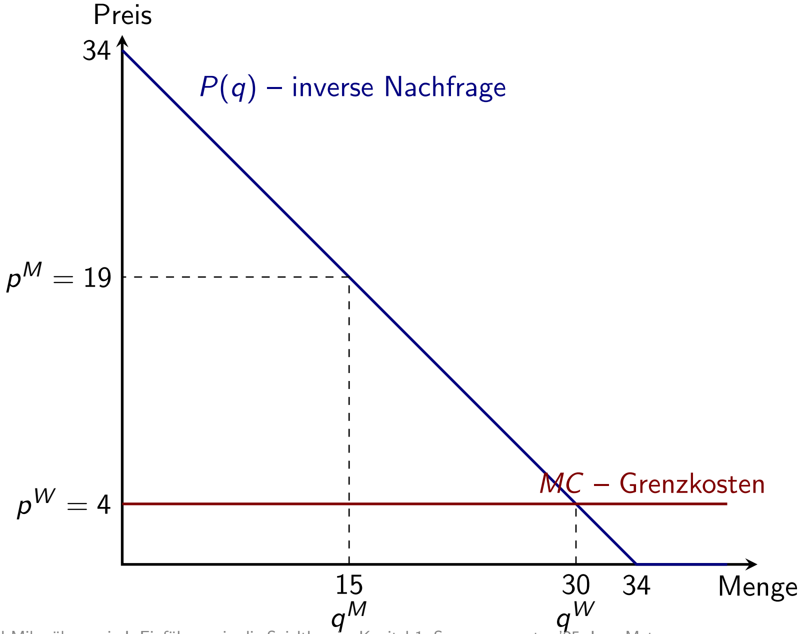
$\Rightarrow$ Grenzkosten $MC(q) \equiv 4$

Gleichgewichtsbedingung:

$$p^* = MC$$

$\Rightarrow$ Gleichgewicht:

Graphische Darstellung der Referenzfälle



Cournot

Entscheidungsvariable: Menge

Entscheidungsreihenfolge: simultan

$\rightarrow$ Spiel in Normalform

$\rightarrow$ Lösung: Nash Gleichgewicht

Cournot-Duopol

Zwei Firmen legen simultan ihre jeweiligen Produktionsmengen q_1 und q_2 fest.

<u>Maximierungsprobleme der Firmen:</u>

$$\max_{q_1 \geq 0} (34 - q_1 - q_2) \cdot q_1 - 4 \cdot q_1$$

$$\max_{q_2 \geq 0} (34 - q_1 - q_2) \cdot q_2 - 4 \cdot q_2$$

- Die Entscheidung der jeweils anderen Firma beeinflusst die eigene Zielfunktion.
- Simultane Entscheidung: Die Firmen kennen die jeweils anderen Entscheidungen noch nicht!

Erwartungen

- Beide Firmen bilden Erwartungen über die Menge der jeweils anderen Firma:

  q_2^e: Erwartung von Firma 1 über die Menge von Firma 2

  q_1^e: Erwartung von Firma 2 über die Menge von Firma 1

- Beide Firmen maximieren gegeben ihren jeweiligen Erwartungen.

  $q_1 = q_1(q_2^e)$ (Reaktion von Firma 1, „beste Antwort“)

  $q_2 = q_2(q_1^e)$ (Reaktion von Firma 2, „beste Antwort“)

<u>Im Gleichgewicht:</u>

Die Erwartungen stimmen mit den tatsächlich gewählten Mengen überein:

$$q_1(q_2^e) = q_1^e \qquad \text{und} \qquad q_2(q_1^e) = q_2^e$$

Beste Antworten im Cournot-Duopol

Die beste Antwort von Firma 2 hängt von der Mengenentscheidung q_1 von Firma 1 ab.

Da das Ergebnis eine Funktion von q_1 ist, nennen wir die beste Antwort hier auch

Reaktionsfunktion.

Welches ist die beste Entscheidung von Firma 2, falls Firma 2 erwartet, dass Firma 1 die Menge q_1^e wählt?

Löse das Maximierungsproblem

$$\max_{q_2 \geq 0} \; P(q_1^e, q_2) \cdot q_2 - c(q_2)$$

Die Lösung schreiben wir als $q_2(q_1^e)$.

Beste Antworten im Cournot-Duopol

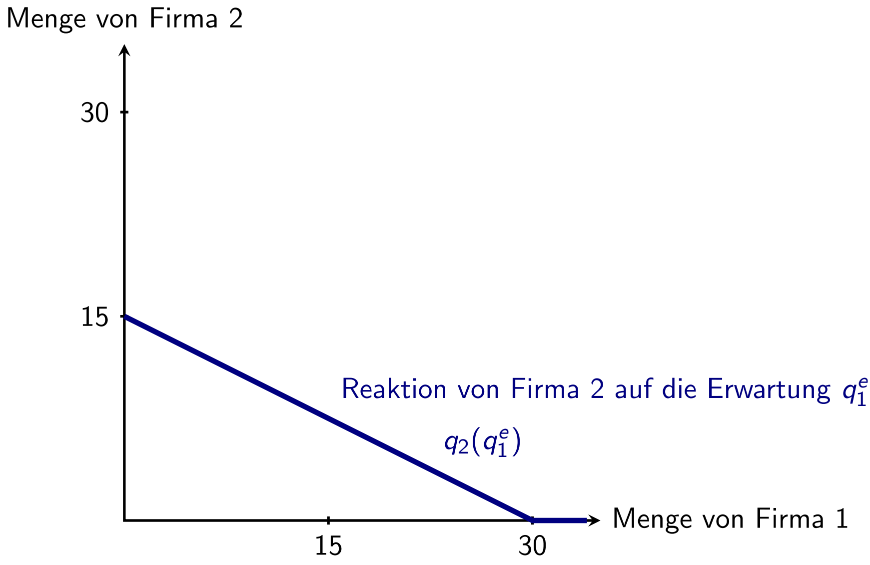
Mit $P(q_1^e, q_2) = 34 - q_1^e - q_2$ und $c(q_2) = 4 \cdot q_2$ schreiben wir:

$$\max_{q_2 \geq 0} \, (34 - q_1^e - q_2) \cdot q_2 - 4 \cdot q_2$$

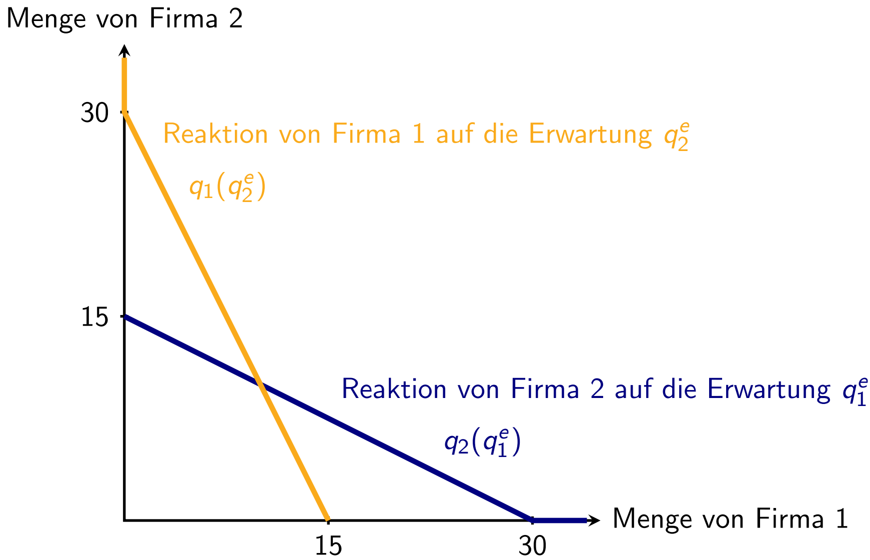
Notwendige Bedingung erster Ordnung:

Reaktionsfunktion:

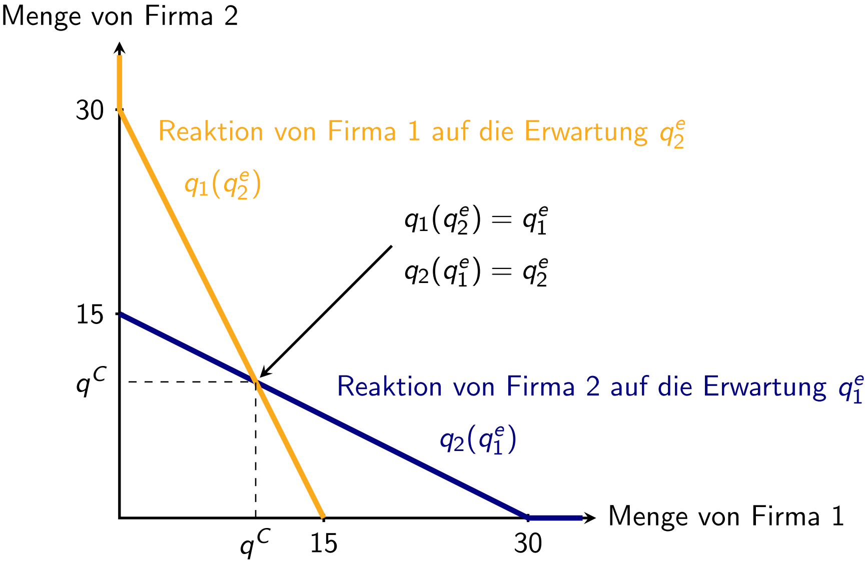
Graphische Darstellung des Nash Gleichgewichts



Graphische Darstellung des Nash Gleichgewichts



Graphische Darstellung des Nash Gleichgewichts



Rechnerische Lösung des Cournot Duopols

Reaktion von Firma 1 auf die Menge q_2

$$q_1(q_2) = 15 - \frac{1}{2} \cdot q_2$$

Reaktion von Firma 2 auf die Menge q_1

$$q_2(q_1) = 15 - \frac{1}{2} \cdot q_1$$

Die Lösung (q_1^c, q_2^c) dieser beiden Gleichungen beschreibt das

Nash Gleichgewicht:

Schema: Problem und Lösung des Cournot Duopols

Firma 1 erwartet q_2^e

Firma 2 erwartet q_1^e

Im Gleichgewicht:

erfüllte Erwartungen

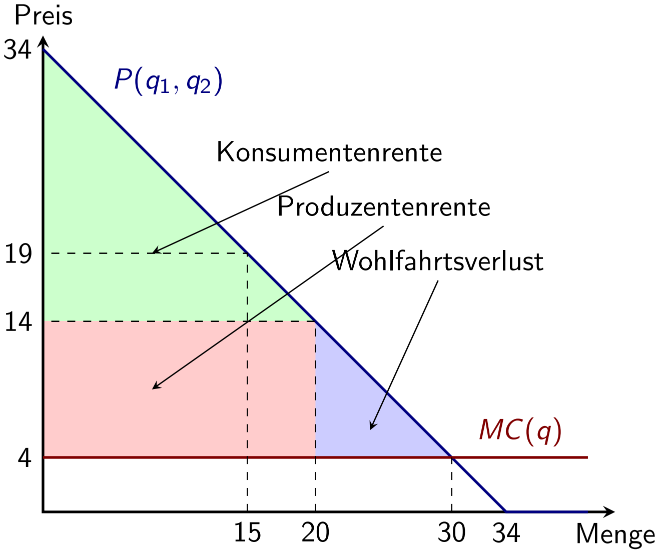
Firma 1 reagiert auf q_2^e

$q_1 = q_1(q_2^e)$

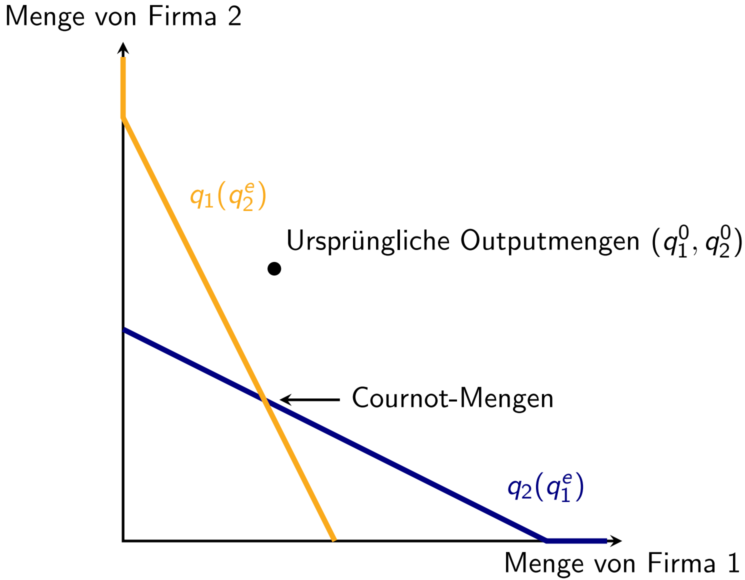
Firma 2 reagiert auf q_1^e

$q_2 = q_2(q_1^e)$

Wohlfahrtsanalyse Cournot Duopol



Stabilität der (dieser) Cournot-Lösung



Iterative Elimination strikt dominierter Strategien im Cournot Duopol

Für die Gewinnfunktion $\pi_i(q_i, q_j) = (30 - q_i - q_j) \cdot q_i$ lautet die erste partielle Ableitung nach q_i:

$$\frac{\partial \pi_i(q_i, q_j)}{\partial q_i} =$$

Schritt I

Die Monopolmenge $q^M = 15$ dominiert jede größere Menge strikt.

An der Stelle $q_i = q^M = 15$ gilt:

$$\frac{\partial \pi_i(15, q_j)}{\partial q_i} =$$

Jede Firma kann also annehmen, dass für die Menge der jeweils anderen Firma $q_j \leq q^M = 15$ gilt.

Iterative Elimination strikt dominierter Strategien im Cournot Duopol

Schritt II

Die Menge $7.5 = \frac{1}{2}q^M$ dominiert jede kleinere Menge strikt, falls $q_j \leq 15$.

An der Stelle $q_i = \frac{1}{2}q^M = 7.5$ gilt:

$$\frac{\partial \pi_i(7.5, q_j)}{\partial q_i} =$$

Falls $q_j \leq 15$, lautet das Vorzeichen dieser Ableitung:

Jede Firma kann annehmen, dass die jeweils andere Firma $q_j \in [7.5, 15]$ wählt.

Iterative Elimination strikt dominierter Strategien im Cournot Duopol

Schritt III

Die Menge $11,25 = \frac{3}{4}q^M$ dominiert jede größere Menge strikt, falls $q_j \in [7.5, 15]$.

Und so weiter und so fort...

Wird dies unendlich oft iteriert, konvergieren die obere und untere Schranke gegen die Cournot-Menge $q^C = 10$. (ohne Beweis)

Kartell

Kartell

Zusammenschluss von Firmen, die im gemeinsamen Interesse handeln.

Welche Mengen q_1 und q_2 müssten die Firmen wählen, um die Summe ihrer Gewinne zu maximieren?

$$\max_{q_1, q_2 \geq 0} P(q_1 + q_2) \cdot q_1 - 4 \cdot q_1 + P(q_1 + q_2) \cdot q_2 - 4 \cdot q_2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{q_1, q_2 \geq 0} P(q_1 + q_2) \cdot (q_1 + q_2) - 4 \cdot (q_1 + q_2)$$

Es kommt nur auf die Summe $q_1 + q_2$ an!

Die Gewinnmaximierende Ausbringungsmenge kennen wir bereits:

die Monopolmenge $q_1 + q_2 = q^M = 15$!

Kartell: Kollusionsmenge = Monopolmenge

Alle Kombinationen q_1 und q_2 mit $q_1 + q_2 = 15$ maximieren den gemeinsamen Gewinn.

Bei der Menge $q_1 + q_2 = 15$ entsteht der Marktpreis

$$P(q_1 + q_2) = 34 - 15 = 19 \ .$$

Demnach haben Firmen 1 und 2 folgende Gewinne:

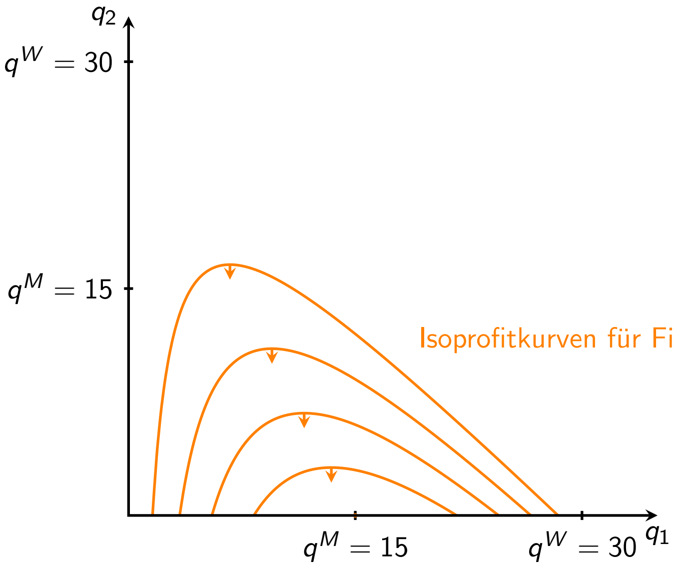
$$\pi_1(q_1, q_2) = 19 \cdot q_1 - 4 \cdot q_1 = 15 \cdot q_1$$

$$\pi_2(q_2, q_1) = 19 \cdot q_2 - 4 \cdot q_2 = 15 \cdot q_2$$

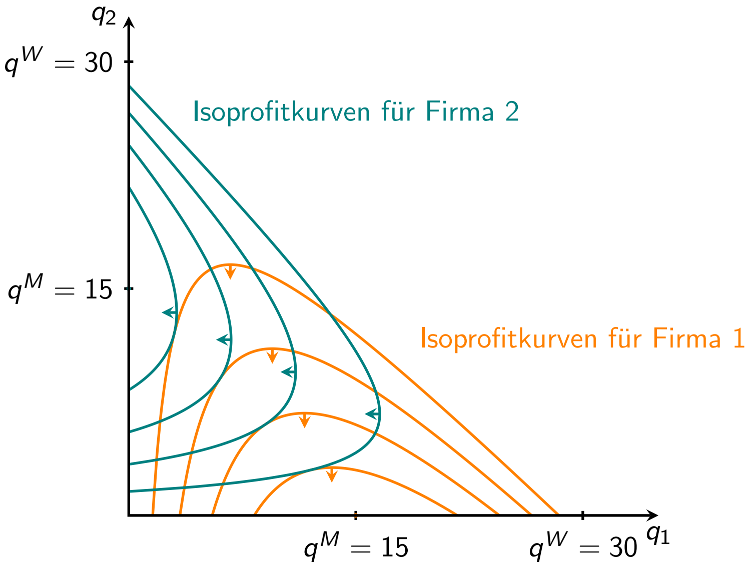
Die Summe der Gewinne beträgt $15 \cdot (q_1 + q_2) = 15 \cdot 15 = 225$

Bei gleicher Aufteilung des Marktes mit $q_1 = q_2 = 7.5$, erzielt jede Firma also einen Gewinn von 112.5 .

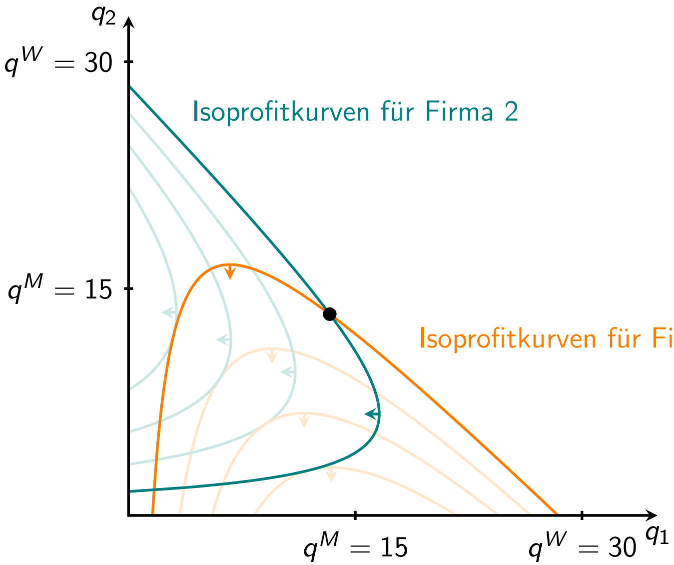
Graphische Darstellung des Kartells



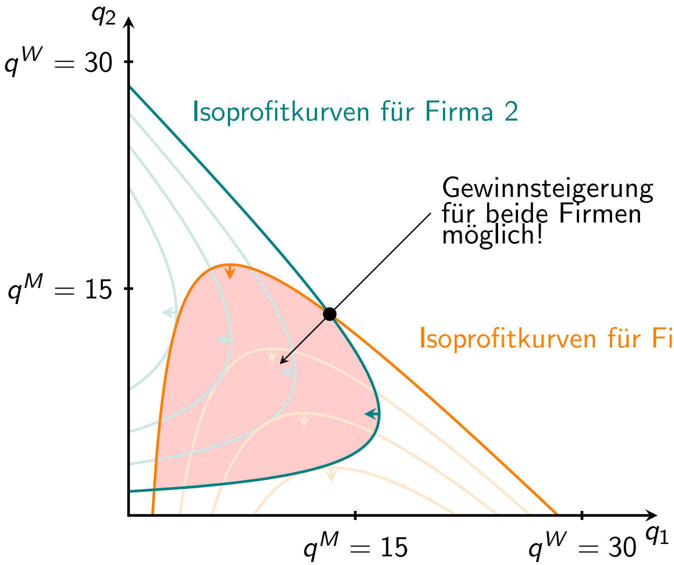
Graphische Darstellung des Kartells



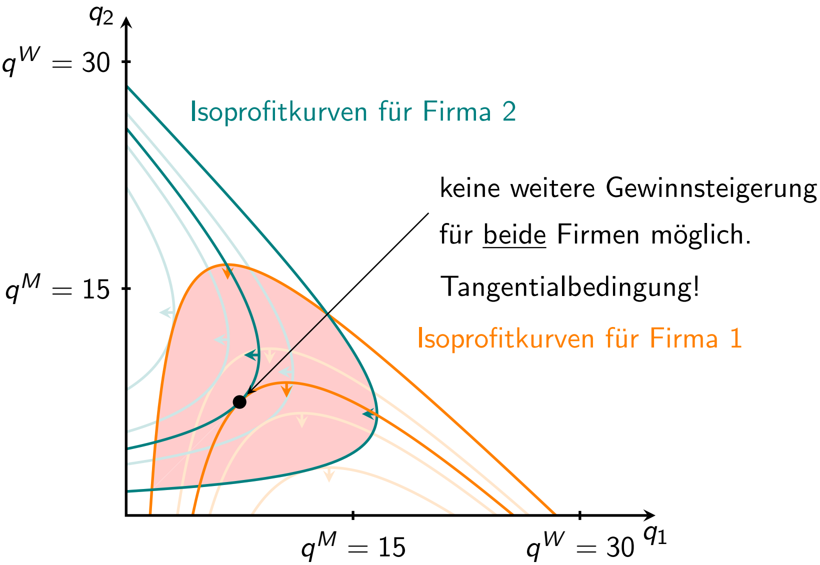
Graphische Darstellung des Kartells



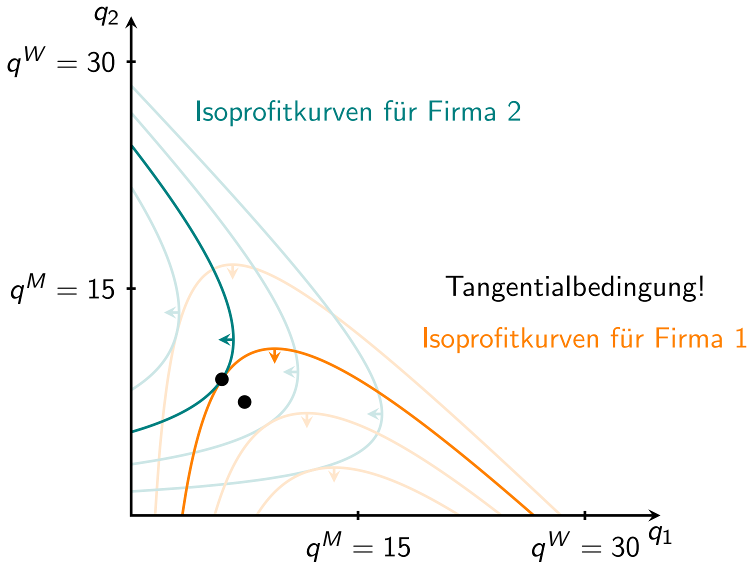
Graphische Darstellung des Kartells



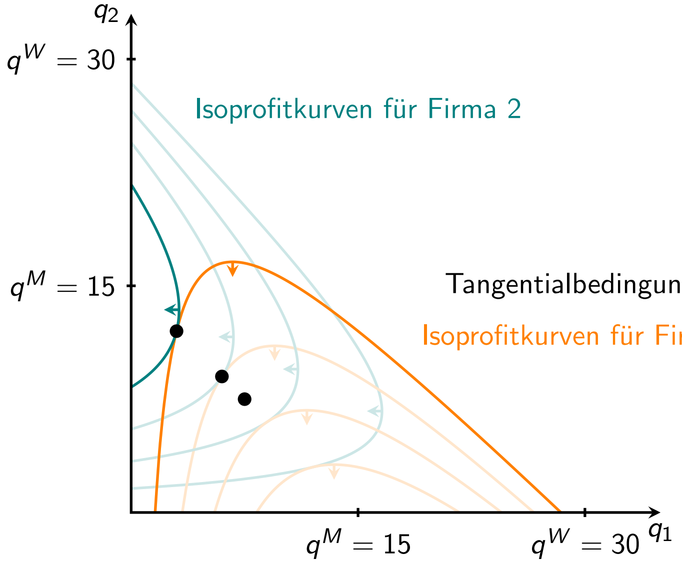
Graphische Darstellung des Kartells



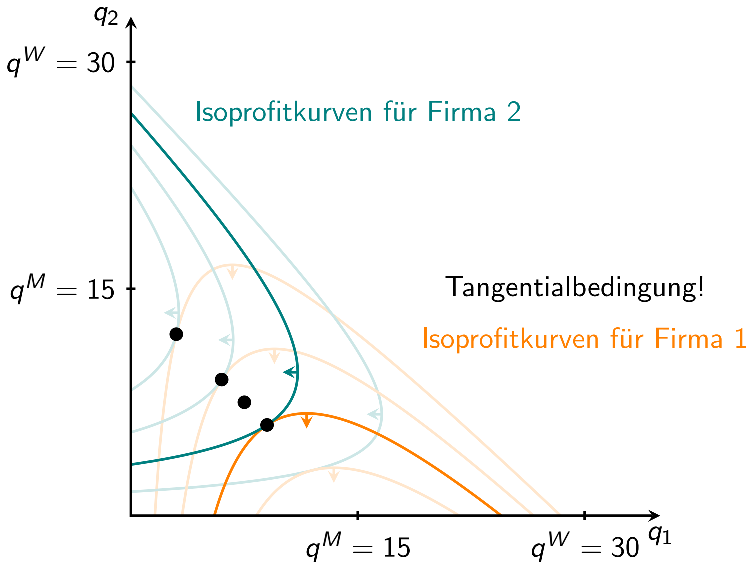
Graphische Darstellung des Kartells



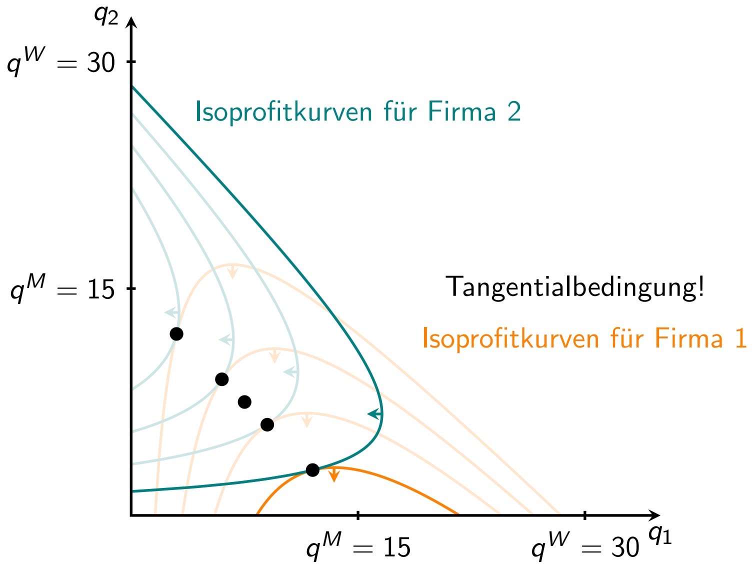
Graphische Darstellung des Kartells



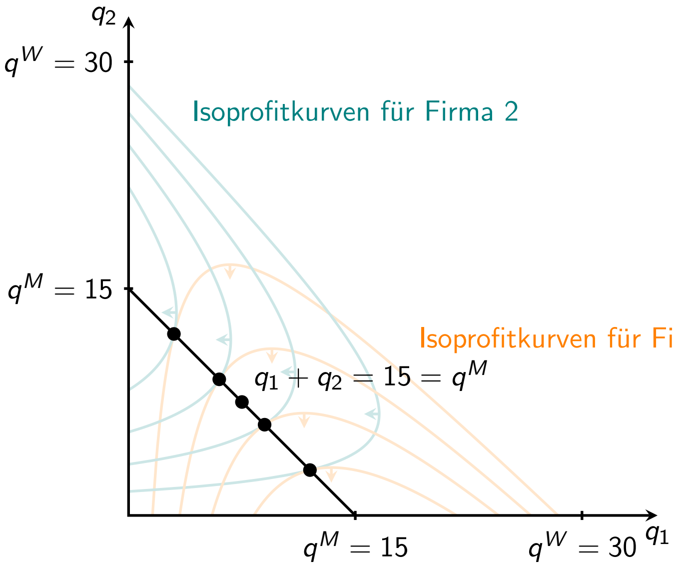
Graphische Darstellung des Kartells



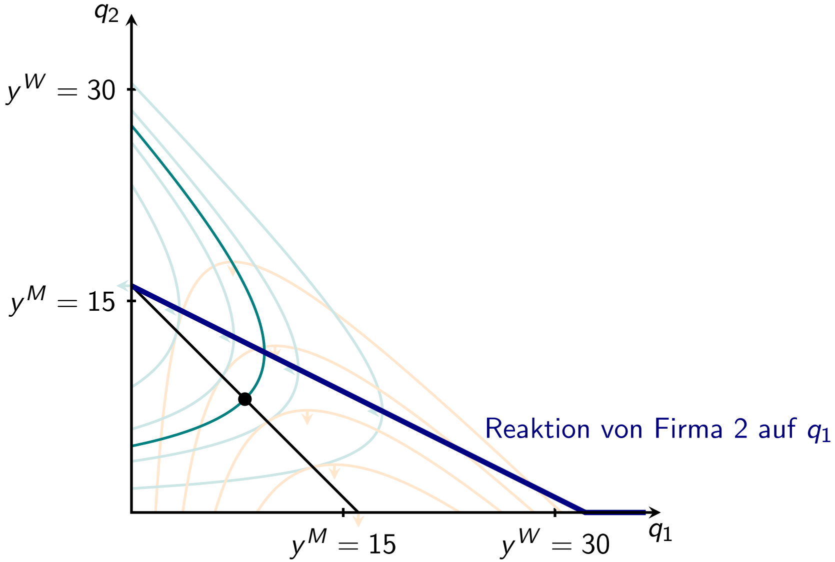
Graphische Darstellung des Kartells



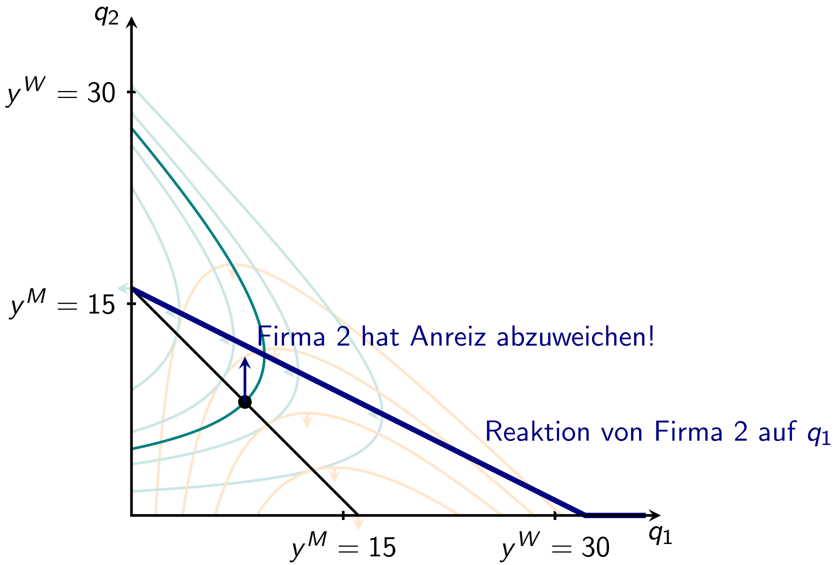
Graphische Darstellung des Kartells



Kartell: Firmen haben Anreize, abzuweichen



Kartell: Firmen haben Anreize, abzuweichen



Bertrand

Entscheidungsvariable: Preis

Entscheidungsreihenfolge: simultan

$\rightarrow$ Spiel in Normalform

$\rightarrow$ Lösung: Nash Gleichgewicht

Preiswettbewerb

Im Preiswettbewerb wählen die Firmen einen Preis für das angebotene Produkt.

Für $Q = q_1 + q_2$:

Inverse Nachfrage $P(Q) = 34 - Q$

$$\rightarrow D(p) = 34 - p$$

Wie modellieren wir die Nachfragekurve bei zwei verschiedenen Preisen p_1 und p_2?

Beide Firmen produzieren das gleiche Gut.

$\rightarrow$ die Leute kaufen bei der Firma, die den niedrigeren Preis hat:

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 34 - p_1 \\ \frac{34 - p_1}{2} \\ 0 \end{cases} \qquad D_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \frac{34 - p_2}{2} & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 34 - p_2 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Betrand Duopol: Kann ein Preis $p > 4$ ein NGG sein?

Zwei Firmen wählen gleichzeitig Preise zu denen sie das Gut verkaufen.

Falls beide Firmen das Gut zum gleichen Preis $p_1 = p_2 = p$ verkaufen, erzielen beide Firmen einen Gewinn von

$$\pi_1(p,p) = \frac{34-p}{2} \cdot p - 4 \cdot \frac{34-p}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(34-p)\cdot(p-4)}$$

Dieser Gewinn ist positiv, solange $4 < p < 34$.

Falls Firma 1 nun den geringfügig kleineren Preis $\tilde{p} = p - \epsilon$ (für $\epsilon > 0$ nahe null) wählt, bedient sie den gesamten Markt:

$$D_1(\tilde{p}, p) = 34 - \tilde{p} = 34 - (p - \epsilon) = 34 - p + \epsilon$$

Ihr Gewinn beträgt dann (für ϵ klein genug):

$$\pi_1(\tilde{p}, p) = (34 - p + \epsilon)(p - \epsilon - 4) > \boxed{\frac{1}{2}(34-p)\cdot(p-4)}$$

Bertrand Duopol: Nur $p = 4$ ist ein NGG!

Falls beide Firmen das Gut zum Preis $p_1 = p_2 = 4$ anbieten, erzielen beide Firmen Nullgewinne:

$$\pi_1(p,p) = \boxed{\frac{1}{2}(34-p)\cdot(p-4)} \overset{p=4}{=} 0$$

Preisabweichung nach oben $\tilde{p}_1 > 4 = p_2$:

$\rightarrow$ Nullnachfrage $\rightarrow$ Nullgewinne

Preisabweichung nach unten $\tilde{p}_1 < 4 = p_2$:

$\rightarrow$ komplette Marktnachfrage

$$\Rightarrow \pi_1(\tilde{p}_1, 4) = (34-\tilde{p}_1)\cdot(\underbrace{\tilde{p}_1 - 4}_{<0}) < 0$$

$\rightarrow$ Keine profitable Abweichung von $p = 4$ möglich.

Was ist an dem Betrand Modell speziell?

Die Nachfragefunktion!

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 34 - p_1 & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \dfrac{34 - p_1}{2} & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Falls $p_1 = p_2$ führt eine beliebig kleine Preisänderung zu einer Veränderung der Nachgefragten Menge um 100%.

$\tilde{p}_1 > p_2 \Rightarrow$ die Nachfrage sinkt um 100% .

$\tilde{p}_1 < p_2 \Rightarrow$ die Nachfrage steigt um $\sim$ 100%.

Diese Eigenschaft des Modells ist a) wichtig für die Resultate

aber b) nicht besonders realistisch.

Bertrand Duopol

Zwei Strategien um dem Wettbewerb auszuweichen:

- **Bestpreisgarantie**

  $\rightarrow$ Eine Firma garantiert die Erstattung der Preisdifferenz, falls eine Konkurrentin einen niedrigeren Preis anbietet.

- **Produktdifferenzierung**

  $\rightarrow$ Eine Firma verändert wesentliche Eigenschaften des Gutes, damit es nicht mehr perfekt substituierbar ist.

Übernutzung von Gemeinschaftsgütern

Die Tragödie der Allmende

In einem Dorf wohnen vier Familien.

Jede Familie i hat $g_i \geq 0$ Ziegen auf der gemeinschaftlichen Wiese.

$G = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ ist die Gesamtzahl der Ziegen.

Jede Ziege kostet 1€.

Falls G Ziegen auf der gemeinschaftlichen Wiese grasen, erwirtschaften sie insgesamt $16 \cdot \sqrt{G}$.

Die g_i Ziegen von Familie i erwirtschaften demnach $16 \cdot \sqrt{G} \cdot \frac{g_i}{G}$.

Die Familien entscheiden gleichzeitig, wie viele Ziegen grasen sollen.

Zusätzliche Annahme: Ziegen sind beliebig teilbar.

Die Tragödie der Allmende – Spiel in Normalform

Auszahlung an Familie i:

$$16 \cdot \sqrt{G} \cdot \frac{g_i}{G} - g_i$$

$(g_1^*, \ldots, g_4^*)$ ist ein Nash Gleichgewicht,
falls g_i^* folgendes Problem löst:

$$\max_{g_i \geq 0} \; g_i \cdot \frac{16}{\sqrt{g_i + g_{-i}^*}} - g_i \text{ mit } g_{-i}^* = \sum_{j \neq i} g_j^*$$

Bedingungen erster Ordnung:

Hinreichende Bedingungen:

Die Tragödie der Allmende – Effiziente Allokation

Für einen beliebigen Vektor (g_1, g_2, g_3, g_4) beträgt die Summe aller Auszahlungen:

$$\sum_{i=1}^{4} g_i \cdot \frac{16}{\sqrt{g_i + g_{-i}}} - g_i = 16\sqrt{G} - G$$

Maximiere die Summe aller Auszahlungen über G!

Bedingung erster Ordnung:

Ist das Nash Gleichgewicht $(g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^*)$ bzw. die Gesamtmenge der Ziegen im Nash Gleichgewicht $G^* = 196$ effizient?

Wettstreite

In einem Wettstreit konkurrieren zwei Spieler:innen um einen Preis im Wert von vier.

Die Spieler:innen wenden Ressourcen auf, um diesen Preis zu bekommen.

Je mehr Ressourcen ein:e Spieler:in im Verhältnis zu den anderen Spieler:innen aufwendet, desto höher sind dessen Chancen, den Preis zu gewinnen.

Die Wahrscheinlichkeit eine:r Spielerin den Preis zu gewinnen entspricht dem Anteil der aufgewendeten Ressourcen an der Gesamtmenge der Ressourcen.

Die aufgewendeten Ressourcen sind verloren, egal ob man gewinnt oder verliert.

Wettstreite: Standard Tullock Contest mit $n = 2$

Spieler:in i wählt $s_i \geq 0$ ($S_i = \mathbb{R}_{\geq}$)

Wertschätzung für Preis: $4 > 0$

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler:in i gewinnt:

$$\frac{s_i}{s_1 + s_2} \text{ falls } s_1 + s_2 > 0 \text{ und } \frac{1}{2} \text{ falls } s_1 + s_2 = 0$$

Auszahlung für Spieler:in i:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \frac{s_i}{s_1 + s_2} 4 - s_i$$

Wettstreite: Vergleich Theorie & Experiment

Diskussion:

Ist die Vorhersage der Theorie (Nash Gleichgewicht, beste Antworten) brauchbar?

Unterscheide hier zwischen individueller und aggregierter Prognose.

Gibt es Unterschiede zwischen dem theoretischen Modell und dem Experiment in Bezug auf die getroffenen Entscheidungen?

Schlüsselwörter in Kapitel 1.2

- Reaktionsfunktionen
- Mengenwettbewerb: Cournot Gleichgewicht
- Preiswettbewerb: Bertrand Gleichgewicht
- Tragödie der Allmende
- Ineffizienz des Nash Gleichgewichts
- Wettstreite
- Experimente

Gemischte Strategien

und

Existenz eines Nash Gleichgewichts

Beispiel 6: Matching Pennies

		(2) Kopf	Zahl
(1)	Kopf	$-5\ ,\ \ 5$	$1\ ,\ -1$
	Zahl	$1\ ,\ -1$	$-1\ ,\ \ 1$

Gibt es hier ein Nash Gleichgewicht in **reinen Strategien**?

Gemische Strategie: spiele Kopf mit Wahrscheinlichkeit $q \in (0, 1)$ und Zahl mit Wahrscheinlichkeit $1 - q \in (0, 1)$.

Notation: $q \cdot K + (1 - q) \cdot Z$

Matching Pennies: gemischte Strategien

Angenommen Spieler:in 2 spielt für $0 \leq q \leq 1$ die gemischte Strategie:

$$q \cdot K + (1-q) \cdot Z$$

Wie lauten die erwarteten Auszahlungen für Spieler:in 1?

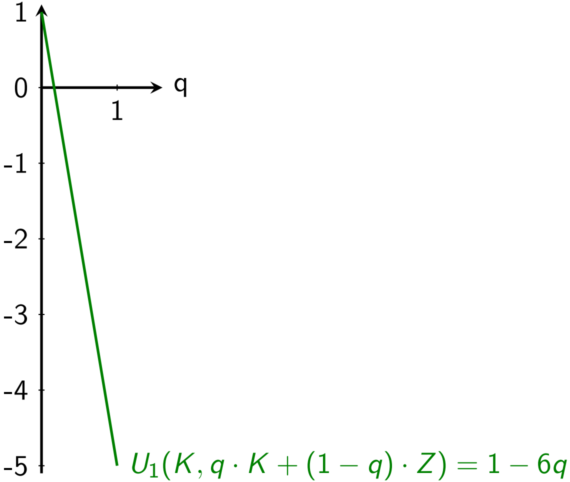
Fall I: Spieler:in 1 spielt Kopf.

$$U_1(K, q \cdot K + (1-q) \cdot Z) \quad = \quad q \cdot u_1(K,K) + (1-q) \cdot u_1(K,Z)$$

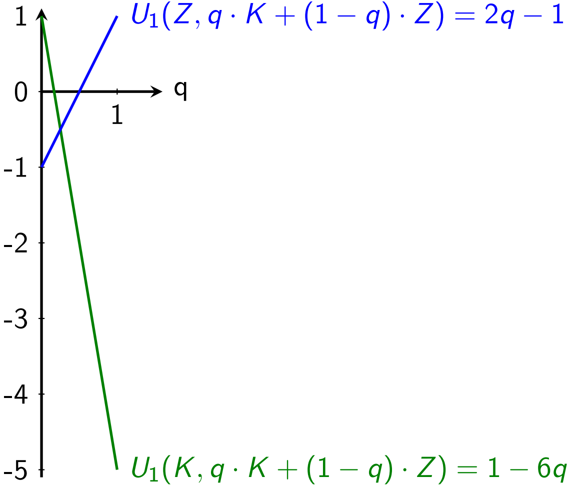
Fall II: Spieler:in 1 spielt Zahl.

$$U_1(Z, q \cdot K + (1-q) \cdot Z) \quad = \quad q \cdot u_1(Z,K) + (1-q) \cdot u_1(Z,Z)$$

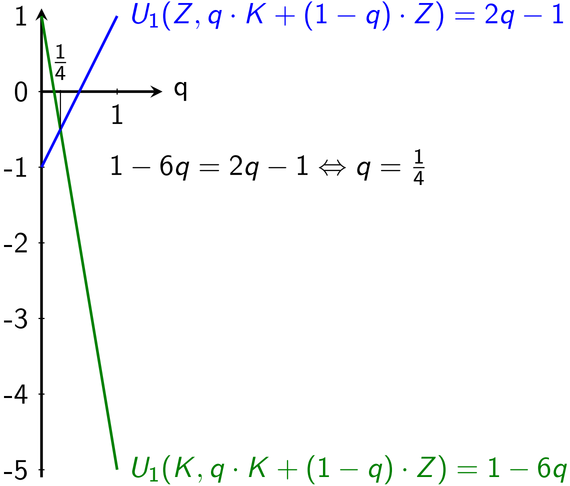
Matching Pennies: erwartete Auszahlungen



Matching Pennies: erwartete Auszahlungen

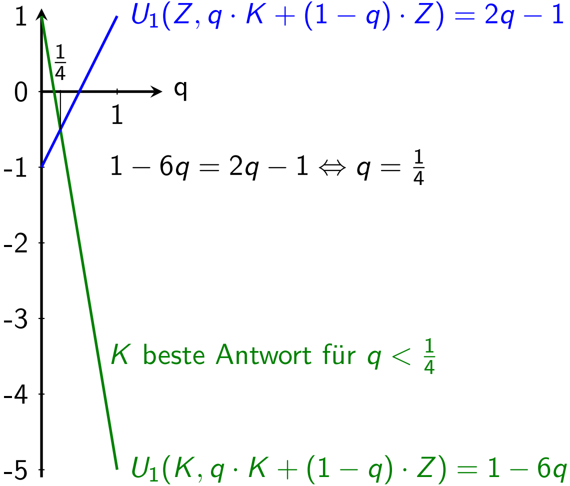


Matching Pennies: erwartete Auszahlungen

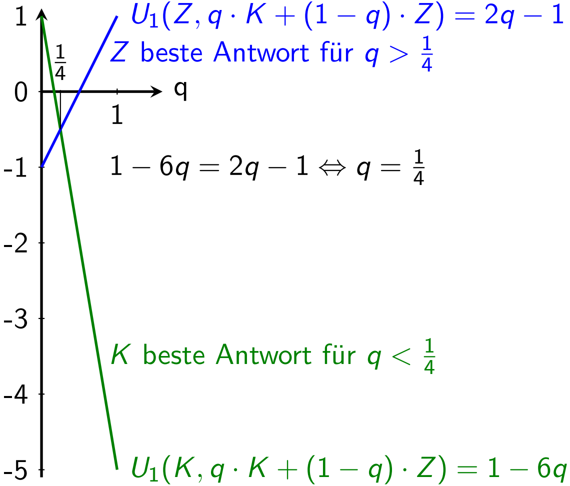


$1 - 6q = 2q - 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

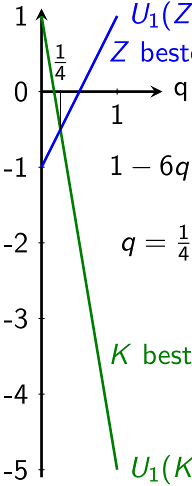
Matching Pennies: erwartete Auszahlungen



Matching Pennies: erwartete Auszahlungen



Matching Pennies: erwartete Auszahlungen



$U_1(Z, q \cdot K + (1-q) \cdot Z) = 2q - 1$

Z beste Antwort für $q > \frac{1}{4}$

$1 - 6q = 2q - 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$

$q = \frac{1}{4}$: Z und K sind beste Antworten.

K beste Antwort für $q < \frac{1}{4}$

$U_1(K, q \cdot K + (1-q) \cdot Z) = 1 - 6q$

Matching Pennies: gemischte beste Antworten

Kurzschreibweise: $$q \cdot K + (1-q) \cdot Z \rightsquigarrow q$$

$$r \cdot K + (1-r) \cdot Z \rightsquigarrow r$$

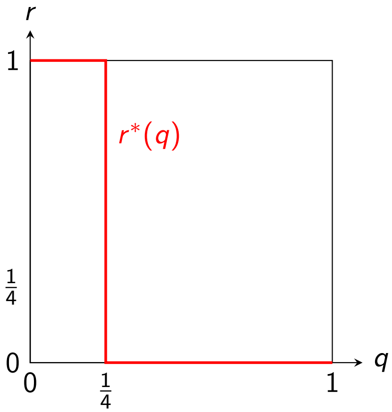
Beste gemischte Antwort von Spieler 1 auf die gemischte Strategie q von Spieler 2:

$$r^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q < \frac{1}{4} \\ [0,1] & \text{falls } q = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{falls } q > \frac{1}{4} \end{cases}$$

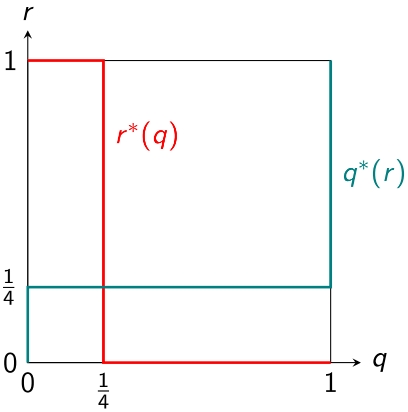
Analog:

$$q^*(r) = \begin{cases} 0 & \text{falls } r < \frac{1}{4} \\ [0,1] & \text{falls } r = \frac{1}{4} \\ 1 & \text{falls } r > \frac{1}{4} \end{cases}$$

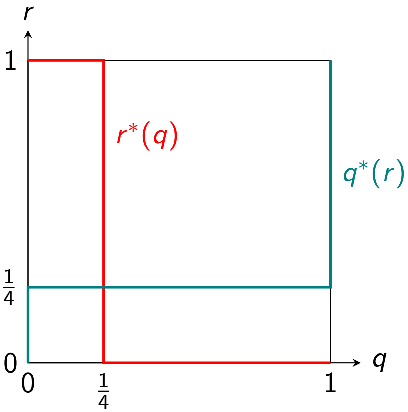
Matching Pennies: Nash Gleichgewicht



Matching Pennies: Nash Gleichgewicht



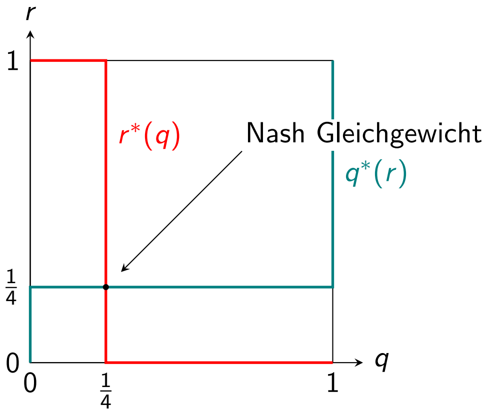
Matching Pennies: Nash Gleichgewicht



Für das Nash Gleichgewicht gilt:

$$r^* \in r(q^*) \text{ und } q^* \in q(r^*)$$

Matching Pennies: Nash Gleichgewicht



Für das Nash Gleichgewicht gilt:

$$r^* \in r(q^*) \text{ und } q^* \in q(r^*)$$

Matching Pennies: Erwartungsnutzen

Definiere für ein beliebiges Paar von gemischten Strategien, die wir mit r und q abkürzen, den Erwartungsnutzen der Spieler $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} U_i(r,q) &= r \cdot q \cdot u_i(K,K) + r \cdot (1-q) \cdot u_i(K,Z) \\ &+ (1-r) \cdot q \cdot u_i(Z,K) + (1-r) \cdot (1-q) \cdot u_i(Z,Z) \end{aligned}$$

Im Nash Gleichgewicht gilt dann:

$$U_1(r^*, q^*) \geq U_1(r, q^*) \ \forall \ r \in [0,1]$$

$$U_2(r^*, q^*) \geq U_2(r^*, q) \ \forall \ q \in [0,1]$$

Definition: Gemischte Strategien in Normalformspielen

In dem Spiel $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ sei $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{ik_i}\}$.

Eine **gemischte Strategie** für Spieler i ist eine Lotterie

$p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{ik_i})$ auf S_i,

wobei $p_{it} \in [0, 1]$ und $\sum_{t=1}^{k_i} p_{it} = 1$.

Die Menge aller gemischten Strategien von Spieler i ist der **Simplex auf** S_i:

$$\Delta_i = \Delta(S_i) = \left\{ p_i \in \mathbb{R}^{k_i}_{\geq} \,\middle|\, p_{i1} + \ldots + p_{ik_i} = 1 \right\}$$

Gemischte Strategien im Team-Spiel (s. VL 1)

Menge der reinen Strategien:

$$S_i = \{0, 1, \dots, 20\}, \;\; i = 1, \dots, 4$$

<u>Eine</u> mögliche gemischte Strategie:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

<u>Noch eine</u> mögliche gemischte Strategie:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Exkurs: Erwartungsnutzentheorie

Im Spiel $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_2\}$ resultiert jede Strategienkombination $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ in einem „Zustand der Welt“.

Sei X die Menge aller solchen Zustände der Welt.

X hat $|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|$ Elemente.

Ein Zustand beschreibt, wer welche Strategie wählt und welche Konsequenzen sich daraus ergeben.

Beispiele für „Zustände der Welt“

Gefangenen Dilemma: z.B. (2) gesteht, (1) leugnet.

⇒ (2) gilt als Verräterin und bekommt keine Aufträge mehr, (1) hat ihre Loyalität bewiesen und steigert ihre Reputation.
oder
⇒ (1) wird von allen anderen Gefangenen dafür gedisst, dass sie ein Opfer ist und eine strikt dominierte Strategie gewählt hat.
oder, oder, oder

Team-Spiel: z.B. $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 9, 12, 7)$

⇒ (1) arbeitet in der 1. Stunde sehr engagiert und chillt die restliche Zeit. Die anderen sind sauer.
oder
⇒ Nach einer Stunde muss (1) mit ihrer Katze zum Tierarzt, die anderen haben vollstes Verständnis dafür.

...

Lotterien über Zustände der Welt

Seien nun die $|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| = K$ Zustände in folgender Menge enthalten:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots x_K\}$$

Wir interpretieren hierbei zum Beispiel den Zustand x_1 als Resultat der Entscheidungen $(s_{11}, s_{21}, \ldots, s_{n1}) \in S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Eine Lotterie über X ordnet nun jedem Element aus X eine Wahrscheinlichkeit zu.

$$p = (p_1, x_1; p_2, x_2; \ldots; p_K, x_K)$$

mit $p_1, p_2, \ldots, p_K \geq 0$ und $p_1 + p_2 + \ldots + p_K = 1$

Zur Vereinfachung nennen wir obige Lotterie einfach „p“.
Die Menge aller solchen Lotterien nennen wir $\Delta(X)$.

Nutzenfunkionen über Zuständen und Lotterien

Bisher hatten wir Präferenzen über Zustände definiert, die sich aus **reine Strategien** ergeben.

Diese Präferenzen werden durch eine Nutzenfunktion u_i repräsentiert, die wir **von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion** nennen.

Nutzenfunkionen über Zuständen und Lotterien

Bisher hatten wir Präferenzen über Zustände definiert, die sich aus **reine Strategien** ergeben.

Diese Präferenzen werden durch eine Nutzenfunktion u_i repräsentiert, die wir **von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion** nennen.

Nun möchten wir Präferenzen auf Lotterien über Zustandsräumen definieren, die sich aus **gemischten Strategien** ergeben.

Diese Präferenzen werden durch eine Nutzenfunktion U_i repräsentiert, die wir **Erwartungsnutzen** nennen.

Erwartungsnutzentheorie

von Neumann & Morgenstern (1944): Theory of Games and Economic Behavior

Annahme: Jeder Spieler i hat eine Präferenzordnung $\succsim_i$ auf dem Raum aller Lotterien über den Zuständen der Welt.

Diese Präferenzordnung $\succsim_i$ erfülle:

- (1) Transitivität und Vollständigkeit
- (2) Stetigkeit
- (3) Unabhängigkeit

von Neumann und Morgenstern haben gezeigt, dass die **Erwartungsnutzenfunktion**, die eine solche Präferenzordnung repräsentiert, linear in den Wahrscheinlichkeiten sein muss:

$$U(p_1, x_1; \ldots; p_K, x_K) = p_1 \cdot u(x_1) + \ldots + p_K \cdot u(x_K)$$

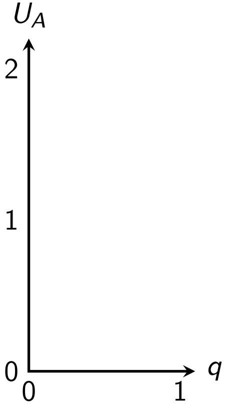
Beste Antworten von Anne im 1Live/eldoradio*-Spiel

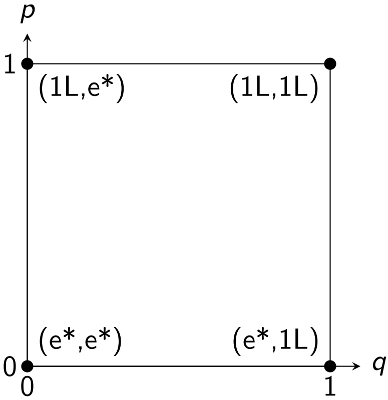
		q	Ben	$1-q$
		1L		e*
Anne	1L	2 , 1		0 , 0
	e*	0 , 0		1 , 2

$$U_A(1\mathrm{L}, q \cdot 1\mathrm{L} + (1-q) \cdot \mathrm{e}^*) \quad =$$
$$U_A(\mathrm{e}^*, q \cdot 1\mathrm{L} + (1-q) \cdot \mathrm{e}^*) \quad =$$

Die Kurve der besten Antwort von Anne

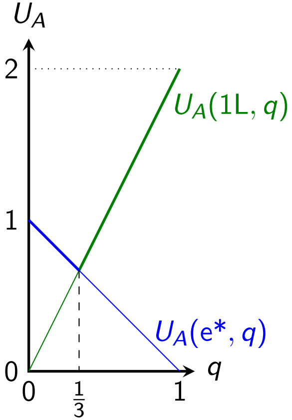
$$
\begin{aligned}
{\color{green} U_A(1\text{L}, q \cdot 1\text{L} + (1-q)\cdot \text{e*})} &{\color{green} = q \cdot 2 + (1-q)\cdot 0 = 2q} \\
{\color{blue} U_A(\text{e*}, q \cdot 1\text{L} + (1-q)\cdot \text{e*})} &{\color{blue} = q \cdot 0 + (1-q)\cdot 1 = 1-q}
\end{aligned}
$$

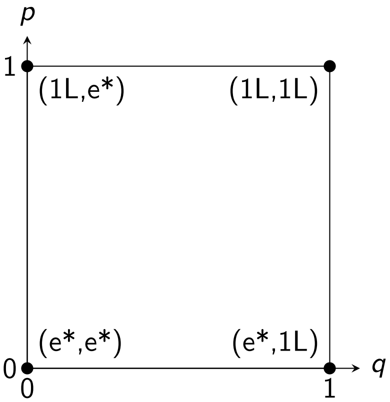




Die Kurve der besten Antwort von Anne

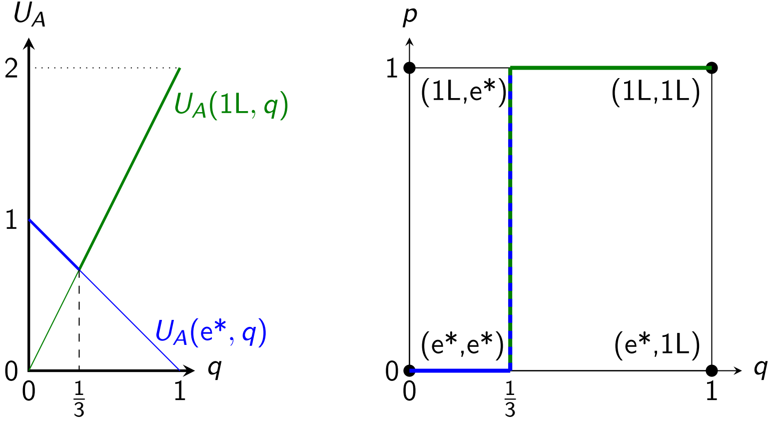
$$
\begin{aligned}
U_A(1\text{L}, q \cdot 1\text{L} + (1-q) \cdot \text{e*}) &= q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = 2q \\
U_A(\text{e*}, q \cdot 1\text{L} + (1-q) \cdot \text{e*}) &= q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 = 1-q
\end{aligned}
$$





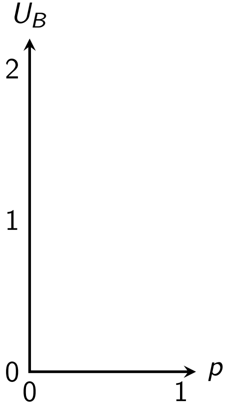
Die Kurve der besten Antwort von Anne

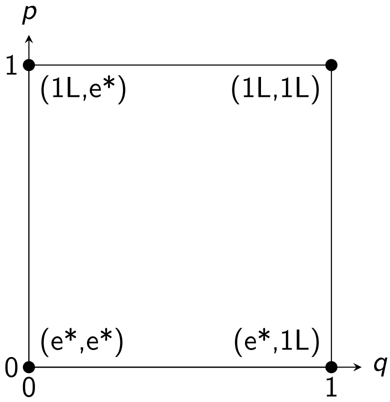
$$
\begin{aligned}
U_A(1L, q \cdot 1L + (1-q) \cdot e^*) &= q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = 2q \\
U_A(e^*, q \cdot 1L + (1-q) \cdot e^*) &= q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1 = 1 - q
\end{aligned}
$$



Die Kurve der besten Antwort von Ben

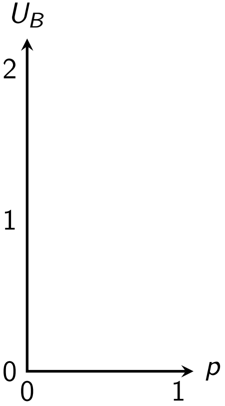
$$U_B(p \cdot 1\text{L} + (1-p) \cdot \text{e}^*, 1\text{L}) \quad =$$
$$U_B(p \cdot 1\text{L} + (1-p) \cdot \text{e}^*, \text{e}^*) \quad =$$

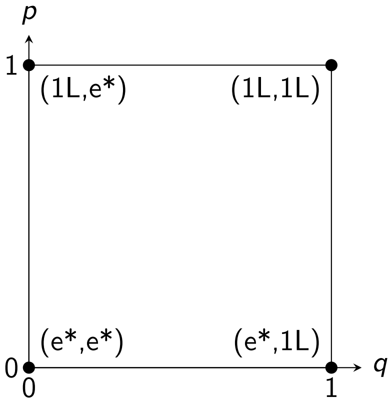




Die Kurve der besten Antwort von Ben

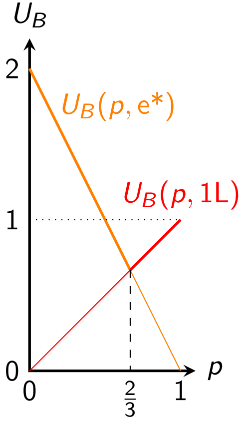
$$U_B(p \cdot 1\mathrm{L} + (1-p) \cdot \mathrm{e}^*, 1\mathrm{L}) \;=\; p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$
$$U_B(p \cdot 1\mathrm{L} + (1-p) \cdot \mathrm{e}^*, \mathrm{e}^*) \;=\; p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 = 2 - 2p$$

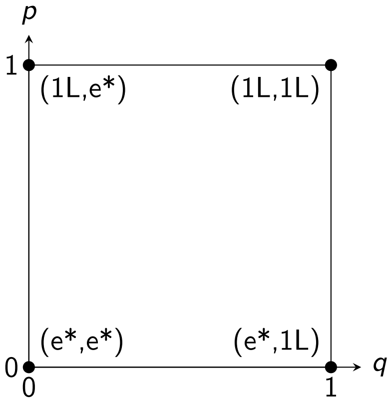




Die Kurve der besten Antwort von Ben

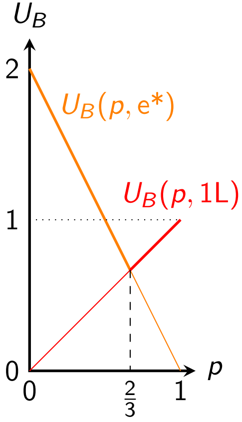
$$U_B(p \cdot 1\mathrm{L} + (1-p)\cdot \mathrm{e}^*, 1\mathrm{L}) \;=\; p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p$$
$$U_B(p \cdot 1\mathrm{L} + (1-p)\cdot \mathrm{e}^*, \mathrm{e}^*) \;=\; p\cdot 0 + (1-p)\cdot 2 = 2-2p$$

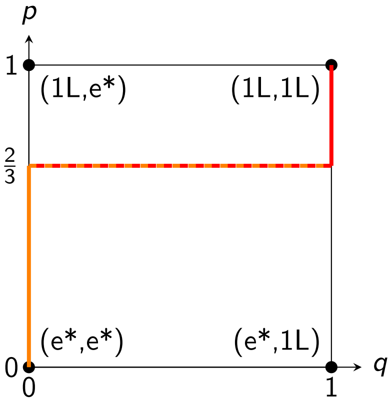




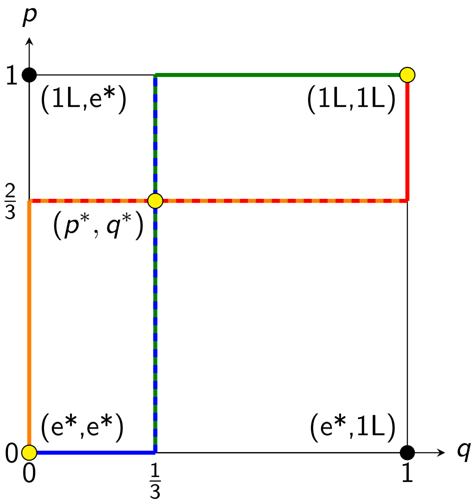
Die Kurve der besten Antwort von Ben

$$U_B(p \cdot 1\mathrm{L} + (1-p)\cdot \mathrm{e}^*, 1\mathrm{L}) = p \cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p$$
$$U_B(p \cdot 1\mathrm{L} + (1-p)\cdot \mathrm{e}^*, \mathrm{e}^*) = p \cdot 0 + (1-p)\cdot 2 = 2 - 2p$$





Nash Gleichgewichte als Schnittpunkte



Gemischte Strategien bei n Spielern

Gemischte Strategien

Es seien $S_1 = \{s_{11}, \ldots, s_{1k_1}\}, \ldots, S_n = \{s_{n1}, \ldots, s_{nk_n}\}$.

Es bezeichne $p_i(s_{it}) = p_{it}$ und $p_{-i}(s_{-i}) = \prod_{j \neq i} p_j(s_j)$.

Der Ausdruck $p_{-i} \in \underset{j \neq i}{\times} \Delta(S_j)$ bezeichnet die $n-1$ gemischten Strategien der anderen Spieler.

Gemischte Nash Gleichgewichte bei $n \geq 3$ Spielern

Falls es mehr als drei Spieler gibt, gibt es für jeden Spieler mindestens zwei Gegner.

Im Prinzip könnten sich diese beiden (oder mehr) Gegner beim Mischen absprechen...

Im gemischten Nash Gleichgewicht nehmen wir aber an, dass die Gegner dies nicht tun.

Annahme

Alle Spieler mischen ihre Strategien stochastisch unabhängig voneinander!

In Kapitel 3 werden wir diese Annahme aufheben.

Gemischte Strategien: Beste Antworten

Angenommen, (2) wählt die gemischte Strategie $p_2 = (p_{21}, \ldots, p_{2k_2})$:

$$U_1(s_{11}, p_2) = p_{21} u_1(s_{11}, s_{21}) + \ldots + p_{2k_2} u_1(s_{11}, s_{2k_2})$$

Falls (1) die gemischte Strategie $p_1 = (p_{11}, \ldots, p_{1k_1})$ wählt:

$$U_1(p_1, p_2) = p_{11} U_1(s_{11}, p_2) + \ldots + p_{1k_1} U_1(s_{1k_1}, p_2)$$

Die Menge der besten Antworten von (1) auf p_2 von (2) ist definiert durch:

$$BA_1(p_2) = \underset{p_1 \in \Delta(S_1)}{\arg\max}\ U_1(p_1, p_2)$$

Falls also $p_1 \in BA_1(p_2)$, dann gilt $U_1(p_1, p_2) \geq U_1(p_1', p_2)\ \forall\ p_1' \in \Delta(S_1)$.

Gemischte Strategien: Nash Gleichgewichte

Ein Profil von gemischten Strategien $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ ist ein Nash Gleichgewicht, falls

$$p_i^* \in BA_i(p_{-i}^*) \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

beziehungsweise falls

$$U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(p_i, p_{-i}^*) \text{ für alle } p_i \in \Delta_i, i = 1, \ldots, n$$

Gemischte Nash Gleichgewichte

Proposition C

Sei (p_i^*, p_{-i}^*) ein gemischtes Nash Gleichgewicht. Dann gilt:

$$p_{it}^* > 0 \Rightarrow U_i(s_{it}, p_{-i}^*) = U_i(p_i^*, p_{-i}^*)$$

Gemischte Nash Gleichgewichte

Proposition C

Sei (p_i^*, p_{-i}^*) ein gemischtes Nash Gleichgewicht. Dann gilt:

$$p_{it}^* > 0 \Rightarrow U_i(s_{it}, p_{-i}^*) = U_i(p_i^*, p_{-i}^*)$$

Beweis

(p_i^*, p_{-i}^*) NGG $\Rightarrow U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(s_{it}, p_{-i}^*)$

Definiere $\tilde{p}_i$ durch $\tilde{p}_{it} = 0$ und $\tilde{p}_{ik} = p_{ik}^*/(1 - p_{it}^*)$. Dann gilt:

$$U_i(\tilde{p}_i, p_{-i}^*) = \ldots = U_i(p_i^*, p_{-i}^*) + \left(U_i(p_i^*, p_{-i}^*) - U_i(s_{it}, p_{-i}^*)\right) \frac{p_{it}^*}{1 - p_{it}^*}$$

(p_i^*, p_{-i}^*) NGG $\Rightarrow U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(\tilde{p}_i, p_{-i}^*)$.

$$p_{it}^* > 0 \Rightarrow U_i(p_i^*, p_{-i}^*) - U_i(s_{it}, p_{-i}^*) \leq 0$$

Strikte Dominanz mit gemischten Strategien

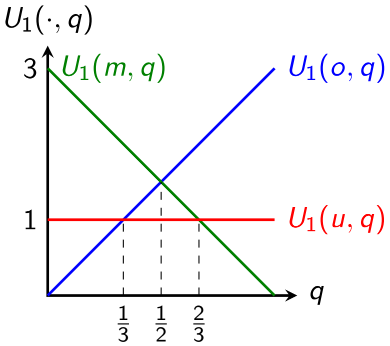
Wenn die reine Strategie s_i durch die reine Strategie s_i' strikt dominiert wird, dann ist s_i nie beste Antwort, egal was die anderen Spieler wählen.

Angenommen s_i ist nie beste Antwort, egal was die anderen Spieler wählen. Folgt daraus, dass s_i strikt dominiert ist?

		(2) l	r
	o	3 , –	0 , –
(1)	m	0 , –	3 , –
	u	1 , –	1 , –

Keine Strategie von (1) ist durch eine (reine) Strategie dominiert.
Aber u ist niemals eine beste Antwort.

Strikte Dominanz mit gemischten Strategien

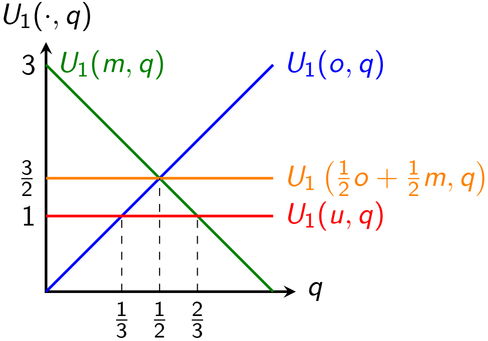


Betrachte die gemischte Strategie von (2): $q \cdot l + (1-q) \cdot r$

$$
\begin{aligned}
U_1(o, q \cdot l + (1-q) \cdot r) &= q \cdot 3 + (1-q) \cdot 0 = 3q \\
U_1(m, q \cdot l + (1-q) \cdot r) &= q \cdot 0 + (1-q) \cdot 3 = 3 - 3q \\
U_1(u, q \cdot l + (1-q) \cdot r) &= q \cdot 1 + (1-q) \cdot 1 = 1
\end{aligned}
$$

Strikte Dominanz mit gemischten Strategien

Betrachte nun die gemischte Strategie von (1): $\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m$



$$U_1\left(\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m, q\right) = \frac{1}{2} \cdot 3q + \frac{1}{2} \cdot (3 - 3q) = \frac{3}{2}$$

Die Strategie u wird durch $\frac{1}{2}o + \frac{1}{2}m$ strikt dominiert!

Existenz eines Nash Gleichgewichtes

Theorem (Nash 1950)

Jedes endliche Spiel $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ hat mindestens ein Nash Gleichgewicht, eventuell in gemischten Strategien.

Der Beweis benutzt Kakutanis Fix-Punkt Theorem.

Wir verzichten in dieser einführenden Vorlesung auf den Beweis.

Schlüsselwörter in Kapitel 1.3

- Reine und gemischte Strategie, Simplex
- von Neumann-Morgenstern-Nutzen, Erwartungsnutzen
- Dominiertheit durch reine und gemischte Strategien
- Beste Antworten auf reine und gemischte Strategien
- Nash Gleichgewicht in reinen und gemischten Strategien
- Unabhängiges Mischen
- Existenz von Nash Gleichgewichten