Übungsaufgaben zu Einführung in die Spieltheorie
Sommersemester 2025

Kapitel 1 Statische Spiele unter vollständiger Information

1.1 Grundlegende Begriffe: Spiele in Normalform und Nash Gleichgewicht

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes Spiel mit zwei Spielerinnen und jeweils zwei reinen Strategien („oben“ und „unten“ für Spielerin 1 bzw. „links“ und „rechts“ für Spielerin 2):

Spielerin 1 \ Spielerin 2	links	rechts
oben	a , b	c , d
unten	e , f	g , h

a) Welche Ungleichungen zwischen den Auszahlungen an die einzelnen Spielerinnen müssen in jedem Fall erfüllt sein, falls die Strategienkombination (oben, links) ein Gleichgewicht in strikt dominanten Strategien ist?

b) Welche Ungleichungen zwischen den Auszahlungen an die einzelnen Spielerinnen müssen in jedem Fall erfüllt sein, falls die Strategienkombination (oben, links) ein Nash Gleichgewicht ist?

Aufgabe 2

Vier Spielerinnen nehmen an einer Projektarbeit teil, in welche sie Zeit investieren können. Es bezeichne $s_i \geq 0$ die von Spielerin i investierte Zeit.

Der Nutzen von Spielerin i bei gegebenen Entscheidungen (s_1, s_2, s_3, s_4) beträgt:

$$u_i(s_1, s_2, s_3, s_4) = 4\sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} - s_i$$

a) Berechne die beste Antwort von Spielerin i als Funktion der Entscheidungen $s_{-i} \in \mathbb{R}^3_{\geq}$ der anderen Spielerinnen. Beachte hierbei, dass keine negative Menge Zeit investiert werden kann.

b) Bestimme die Menge der Nash Gleichgewichte (in reinen Strategien).

c) Berechne nun die Menge der Entscheidungen, welche die Summe aller Nutzenwerte maximieren.

d) Gibt es ein Pareto-effizientes Nash Gleichgewicht?

e) Gibt es eine Entscheidung aus c), welche nicht Pareto-effizient ist?

Aufgabe 3

Zwei Spielerinnen wollen 100€ untereinander aufteilen. Dafür benennen sie gleichzeitig den Anteil s_1 bzw. s_2, den sie gerne bekommen würden, wobei $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$. Wenn die beiden von den Spielerinnen genannten Anteile kompatibel sind, also falls $s_1 + s_2 \leq 1$, so erhält jede Spielerin ihren Anteil, d.h. Spielerin 1 erhält $s_1 \cdot 100$€ und Spielerin 2 erhält $s_2 \cdot 100$€. Andernfalls, also wenn $s_1 + s_2 > 1$, gehen beide Spielerinnen leer aus. Nehmen Sie an, dass sich beide Spielerinnen für ihr eigenes Geld interessieren und dass beide Spielerin mehr Geld bevorzugen. Bestimme alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien. Hat eine Spielerin eine strikt dominante Strategie?

Aufgabe 4

Überprüfe, welche der folgenden Aussagen zutreffen. (Jede richtige Aussage ist zu beweisen; für jede falsche Aussage ist ein Gegenbeispiel zu geben.) Alle Aussagen beziehen sich auf Spiele in Normalform mit zwei Spielerinnen und je zwei Strategien.

a) Jedes Nash Gleichgewicht ist gleichzeitig auch ein Gleichgewicht in strikt dominanten Strategien.

b) Jedes Gleichgewicht in strikt dominanten Strategien ist gleichzeitig auch ein Nash Gleichgewicht.

c) In einem Spiel ohne Nash Gleichgewicht in reinen Strategien kann gleichwohl eine Spielerin eine strikt dominante Strategie besitzen.

d) Jede Spielerin kann höchstens eine strikt dominante Strategie besitzen.

e) Ein Spiel kann höchstens ein Gleichgewicht in strikt dominanten Strategien besitzen.

f) Betrachte ein Spiel mit einem Gleichgewicht in strikt dominanten Strategien. Falls (aus irgendeinem Grund) bekannt ist, dass Spielerin 2 nicht ihre strikt dominante Strategie wählt, so kann es für Spielerin 1 unter Umständen auch vorteilhaft sein, nicht ihre strikt dominante Strategie zu wählen.

g) Betrachte ein Spiel mit einem Nash Gleichgewicht in reinen Strategien. Falls (aus irgendeinem Grund) bekannt ist, dass Spielerin 2 nicht ihre zu diesem Nash Gleichgewicht gehörende Strategie wählt, so kann es für Spielerin 1 unter Umständen auch vorteilhaft sein, nicht ihre zu diesem Gleichgewicht gehörende Strategie zu wählen.

Kapitel 1.2: Ökonomische Anwendungen

Aufgabe 5

Betrachte ein Cournot Oligopol mit drei Firmen. Die (inverse) Marktnachfrage sei gegeben durch $P(Q) = 34 - Q$, falls $Q \leq 34$ und $P(Q) = 0$, falls $Q > 34$, wobei $Q = q_1 + q_2 + q_3$. Die drei Firmen haben die identische Kostenfunktion $c_i(q_i) = 4 \cdot q_i$ für $i = 1, 2, 3$.

a) Welche Strategien können durch iterierte Elimination strikt dominierter Strategien ausgeschlossen werden? Vergleiche Dein Ergebnis mit dem in der Vorlesung behandelten Fall zweier Firmen.

b) Bestimme das (einzige) Nash Gleichgewicht dieses Spiels.

Aufgabe 6

Gegeben sei das folgende Normalformspiel

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
s_2	81,19	20,80	20,80	20,80	20,80
s_3	81,19	49,51	40,60	40,60	40,60
s_4	81,19	49,51	25,75	60,40	60,40
s_5	81,19	49,51	25,75	9,91	80,20
s_6	81,19	49,51	25,75	9,91	1,99

a) Bestimme alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

b) Eliminiere iterativ alle strikt dominierten Strategien.

Aufgabe 7

Betrachte das folgende Spiel

	l	r
o	5,1	4,0
m	6,0	3,1
u	6,4	4,4

Welche Strategienpaare verbleiben nach iterierter Elimination schwach dominierter Strategien? Beachte die Reihenfolge der Elimination!

Aufgabe 8

Betrachte den Tullock-Wettstreit mit 2 Spieler:innen, wobei (1) die Wertschätzung 4 und (2) die Wertschätzung 2 für den Preis habe.

Die Nutzenfunktionen lauten also (falls $s_1 + s_2 > 0$):

$$u_1(s_1, s_2) = \frac{s_1}{s_1 + s_2} \cdot 4 - s_1 \qquad u_2(s_1, s_2) = \frac{s_2}{s_1 + s_2} \cdot 2 - s_2$$

Falls $s_1 + s_2 = 0$, erzielt (1) einen Nutzen von $u_1(0, 0) = 2$ und (2) einen Nutzen von $u_2(0, 0) = 1$.

a) Berechne die Bedingungen erster Ordnung von (1) und (2).

b) Berechne das (einzige) Nash Gleichgewicht.

Kapitel 1.3 Gemischte Strategien und Existenz eines Nash Gleichgewichts

Aufgabe 9

Betrachte eine Ökonomie mit zwei Gütern: einem privaten Gut x und einem öffentlichen Gut G. Es gibt nur zwei Agenten $i = 1, 2$, die durch die Nutzenfunktion $u_i(x_i, G) = x_i \cdot G$ charakterisiert sind (dabei bezeichnet x_i die von Agent i konsumierte Menge des privaten Gutes). Die Agenten sind ausgestattet mit $m_i > 0$ Einheiten des privaten Gutes. Diese Einheiten können sie entweder selbst konsumieren oder zur Bereitstellung des öffentlichen Gutes verwenden. Dabei sei eine Technologie angenommen, gemäß der jede Einheit des privaten Gutes in eine Einheit des öffentlichen Gutes umgewandelt werden kann. Die beiden Agenten wählen nun simultan die jeweilige Menge $g_i \in [0, m_i]$, die sie zur Bereitstellung des öffentlichen Gutes verwenden wollen (und das dann in Höhe von $G = g_1 + g_2$ konsumiert wird). Bestimme das Nash Gleichgewicht (g_1^*, g_2^*) dieses Spiels in Abhängigkeit von den Anfangsausstattungen m_1 und m_2. Ist die gleichgewichtige Menge $G^* = g_1^* + g_2^*$ effizient?

Aufgabe 10

Bestimme alle Nash Gleichgewichte (in reinen oder gemischten Strategien) des folgenden Spiels in Normalform

	links	rechts
oben	2,1	0,2
unten	1,2	3,0

Aufgabe 11

Drei Freunde haben sich zum Tennis verabredet. Es können aber immer nur zwei miteinander spielen. Alle drei gehen zum Tennisplatz, sie müssen aber vorher zu Hause entscheiden, ob sie einen Tennisschläger mitnehmen oder nicht. Wenn je zwei einen Schläger mitnehmen, der Dritte aber nicht, dann sind alle zufrieden (zwei spielen, der Dritte schaut zu): sie bekommen alle eine Auszahlung von 1. Falls jedoch alle drei, nur einer oder keiner einen Schläger mitnimmt, dann werden sie nicht spielen, entweder weil sie sich nicht einigen können, wer spielen soll, oder weil sie nicht genug Schläger haben; in diesem Fall ist die Auszahlung an jeden Spieler 0. Beschreibe dieses Spiel in Normalform und finde alle Nash Gleichgewichte (in reinen oder gemischten Strategien).

Aufgabe 12

Zwei Firmen 1 und 2 wollen jeweils eine freie Stelle besetzen; Firma i bietet dafür einen Lohn $w_i > 0$ an, wobei gilt $\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$. Zwei Arbeiterinnen können sich um die beiden Stellen bewerben, jedoch kann jede der beiden sich nur bei einer der beiden Firmen bewerben. Die Arbeiterinnen entscheiden simultan, bei welcher Firma sie sich bewerben wollen. Falls sich nur eine Arbeiterin bei einer Firma bewirbt, bekommt sie den Job. Falls sich beide bei derselben Firma bewerben, wählt die Firma zufällig eine aus, die andere bleibt arbeitslos (und erhält dann eine Auszahlung 0). Bestimme alle Nash Gleichgewichte (in reinen oder gemischten Strategien) des zugehörigen Spiels in Normalform:

	Firma 1	Firma 2
Firma 1	$\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_1$	w_1, w_2
Firma 2	w_2, w_1	$\frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_2$

Aufgabe 13

Bestimme alle Nash Gleichgewichte (in reinen oder gemischten Strategien) des folgenden Spiels in Normalform

	links	rechts
oben	$6, 6$	$4, 6$
unten	$6, 4$	$1, 1$

Aufgabe 14

Betrachte das Spiel „Stein, Schere, Papier“: Zwei Spieler:innen wählen simultan eine der drei Strategien „Stein“, „Schere“oder „Papier“. Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier und Papier schlägt Stein. Zwei identische Strategien erzeugen ein Unentschieden.

Ordne nun den Spielausgängen folgende (von Neumann-Morgenstern-)Nutzenzahlen zu: Sieg-1, Niederlage-0 und Unentschieden-a, wobei $a \in (0, 1)$.

a) Stelle das Spiel in Form einer Bi-Matrix dar.

b) Markiere alle besten Antworten.

c) Nenne alle Nash Gleichgewichte in reinen Strategien.

Eine gemischte Strategie von (2) laute $q = (q_1, q_2, q_3)$ und diejenige von (1) laute $p = (p_1, p_2, p_3)$.

d) Wie lautet der Erwartungsnutzen von (1), falls (1) die gemischte Strategie p spielt und (2) die gemischte Strategie q?

e) Wie lautet die beste Antwort von (1) auf eine gemischte Strategie q von (2)?

f) Wie lautet das Nash Gleichgewicht (p^*, q^*) in gemischten Strategien?

Aufgabe 15

Zwei Spielern ($i = 1, 2$) kann ein minderschweres Verbrechen, nicht aber deren Hauptverbrechen nachgewiesen werden. Beide können die Tat jeweils leugnen (l) oder gestehen (g). Je nach individueller Entscheidung der Spieler sind 4 Zustände der Welt möglich: x_{ll} (falls beide leugnen), x_{lg} (falls der erste leugnet, der zweite gesteht), x_{gl} (falls der erste gesteht, der zweite leugnet) und x_{gg} (falls beide gestehen). Nehme an, die einzig relevanten Merkmale dieser Zustände sind die Jahre, die die beiden Spieler im Gefängnis verbringen müssen. Die Behörden haben folgende Strafen festgesetzt: $x_{ll} = (1, 1)$, $x_{lg} = (16, 4)$, $x_{gl} = (4, 16)$ und $x_{gg} = (9, 9)$ (dabei bezeichnet die erste Komponente die Jahre im Gefängnis für den ersten Spieler, die zweite Komponente die entsprechenden Jahren für den zweiten Spieler). Die Präferenzen der beiden Spieler über den Lotterien auf $X = \{x_{ll}, x_{gl}, x_{lg}, x_{gg}\}$ lassen sich jeweils durch die von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ darstellen, wobei $u_i(x)$ jeweils nur von den *eigenen* Jahren im Gefängnis abhängt.

a) Beschreibe das Spiel in Normalform und finde alle Nash Gleichgewichte, falls beide Spieler risiko-neutral sind (d.h. fall $u_i(x) = -x_i$, wobei x_i die i-te Komponente von $x \in X$).

b) Beschreibe das Spiel in Normalform und finde alle Nash Gleichgewichte, falls der erste Spieler risiko-neutral ist und für den zweiten Spieler gilt: $u_2(x) = -\sqrt{x_2}$.

c) Beschreibe das Spiel in Normalform und finde alle Nash Gleichgewichte, falls beide Spieler risiko-freudig sind und die von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion $u_i(x) = -\sqrt{x_i}$ besitzen.