Einführung in die Spieltheorie im Sommer 2025

Kapitel 3

Statische Spiele unter unvollständiger Information

Moodle

Kapitel 3 Statische Spiele mit unvollständiger Information

Einführendes Beispiel: Cournot Duopol mit unvollständiger Information

Unvollständige Information

In einem Spiel mit **unvollständiger Information** kennt mindestens ein Spieler die Auszahlungsfunktion mindestens eines anderen Spielers nicht.

Cournot Duopol mit asymmetrischer Information

Inverse Nachfragefunktion:

$$P(Q) = 34 - q_1 - q_2$$

Kostenfunktion von Firma 1:

$$c_1(q_1) = 4 \cdot q_1$$

Kostenfunktion von Firma 2:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{3} \\ 4 \cdot q_2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{2}{3} \end{cases}$$

Cournot Duopol mit asymmetrischer Information

Gewinnfunktion von Firma 1

$$\pi_1(q_1, q_2) = (30 - q_1 - q_2)\, q_1$$

Gewinnfunktion von Firma 2 mit niedrigen Kosten

$$\pi_2^L(q_1, q_2) = (34 - q_1 - q_2)\, q_2$$

Gewinnfunktion von Firma 2 mit hohen Kosten

$$\pi_2^H(q_1, q_2) = (30 - q_1 - q_2)\, q_2$$

Cournot Duopol mit asymmetrischer Information

Asymmetrische Information:

- Beide Firmen kennen die Zielfunktion von Firma 1.
- Firma 2 kennt ihre eigene Zielfunktion.
- Firma 1 kennt die Zielfunktion von Firma 2 nicht.
- Firma 1 kennt aber die möglichen Zielfunktionen von Firma 2 und deren Wahrscheinlichkeiten.

All dies ist common knowledge.

Maximierungsproblem von Firma 2 mit $c_2(q_2) = 0$

$\rightarrow$ "Typ" von F_2 : L

$$\max_{q_2 \geq 0} \; (34 - q_1 - q_2)\, q_2$$

Bedingung erster Ordnung:

$$34 - q_1 - 2q_2 \leq 0 \; (= 0 \text{ falls } q_2 > 0)$$

$\Leftrightarrow \; 34 - q_1 \leq 2q_2 \;\; \Leftrightarrow \;\; q_2 \geq 17 - \frac{1}{2} q_1$

Reaktionsfunktion:

$$q_2^L(q_1) = \begin{cases} 17 - \frac{1}{2} q_1 & \text{falls } q_1 < 34 \\ 0 & \text{falls } q_1 \geq 34 \end{cases}$$

Maximierungsproblem von Firma 2 mit $c_2(q_2) = 4$

↳ Typ von F_2: H

$$\max_{q_2 \geq 0} \; (30 - q_1 - q_2)\, q_2$$

Bedingung erster Ordnung:

$$30 - q_1 - 2q_2 \leq 0 \; (= 0 \text{ falls } q_2 > 0)$$

$$q_2^{H}(q_1) = \begin{cases} 15 - \frac{1}{2} q_1 & \text{falls } q_1 < 30 \\ 0 & \text{falls } q_1 \geq 30 \end{cases}$$

Unterschiedliche Reaktionsfunktionen

Firma 2 mit niedrigen Kosten ($c_2(q_2) = 0$) reagiert anders auf die Menge q_1 von Firma 1, als Firma 2 mit hohen Kosten ($c_2(q_2) = 4q_2$):

$$q_2^{\overset{H}{\cancel{L}}}(q_1) = 15 - \frac{1}{2}q_1$$

$$q_2^{\overset{L}{\cancel{H}}}(q_1) = 17 - \frac{1}{2}q_1$$

Firma 1 weiß nicht welcher Firma 2 sie sich gegenüber sieht.

Firma 1 muss den **erwarteten Gewinn** maximieren, wobei die Erwartung über den **Typ** (L/H) von Firma 2 gebildet wird.

Maximierungsproblem von Firma 1

$$\max_{q_1 \geq 0} \overset{\text{Prob}(F_2:L)}{\frac{1}{3}}\left(30 - q_1 - q_2^L\right) q_1 + \overset{\text{Prob}(F_2:H)}{\frac{2}{3}}\left(30 - q_1 - q_2^H\right) q_1$$

$$= \max_{q_1 \geq 0} \left(30 - q_1 - \underbrace{\left(\frac{1}{3}q_2^L + \frac{2}{3}q_2^H\right)}_{=:\bar{q}_2}\right) q_1$$

Bedingung erster Ordnung:

$$30 - 2q_1 - \underbrace{\left(\frac{1}{3}q_2^L + \frac{2}{3}q_2^H\right)}_{\bar{q}_2} \leq 0 \ (= 0 \text{ falls } q_1 > 0)$$

Reaktionsfunktion:

$$q_1(q_2^L, q_2^H) = \begin{cases} 15 \overbrace{- \frac{1}{6}q_2^L - \frac{1}{3}q_2^H}^{-\frac{1}{2}\bar{q}_2} & \text{falls } \overbrace{\frac{1}{3}q_2^L + \frac{2}{3}q_2^H}^{\bar{q}_2} < 30 \\ 0 & \text{falls } \underbrace{\frac{1}{3}q_2^L + \frac{2}{3}q_2^H}_{\bar{q}_2} \geq 30 \end{cases}$$

Cournot Duopol mit asymmetrischer Information

Falls alle Mengen im NGG positiv sind, folgt aus den Bedingungen erster Ordnung:

$$
\begin{aligned}
q_2^L(q_1) &= 17 - \frac{1}{2} q_1 \\
q_2^H(q_1) &= 15 - \frac{1}{2} q_1 \\
q_1(q_2^L, q_2^H) &= 15 - \frac{1}{6} q_2^L - \frac{1}{3} q_2^H
\end{aligned}
$$

zum Vergleich:

$q_1^C = q_2^C = 10$

(ohne Unsicherheit)

Auflösen ergibt:

$$
\begin{aligned}
q_2^L &= 12{,}\bar{2} \\
q_2^H &= 10{,}\bar{2} \\
q_1 &= 9{,}\bar{5}
\end{aligned}
$$

Cournot Duopol mit asymmetrischer Information

In dem zuvor analysierten Duopol hatte Firma 1 keine Information über die tatsächliche Zielfunktion von Firma 2.

Was wäre, wenn Firma 1 selbst ebenfalls mehrere Zielfunktionen haben könnte?

Was wäre, wenn Firma 1 eigene Zielfunktion mit der von Firma 2 korrelierte?

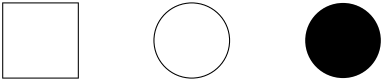
Dann könnte Firma 1 die Information über die eigene Zielfunktion nutzen, um ihre Information über die Zielfunktion von Firma 2 zu aktualisieren.

Firma 1 berechnet demnach eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**.

Beispiel bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die Natur ziehe eine der drei Formen mit den Wahrscheinlichkeiten:

40% 20% 40%



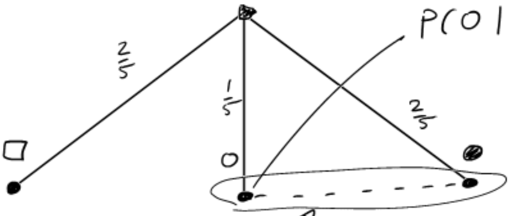
$$P(l|k) = \frac{20\%}{60\%}$$

beobachtet: Quadrat (Q) oder Kreis (K)

unbeobachtet: leer (l) oder gefüllt (g)

Wie lauten die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten?

$$\underbrace{\underset{=1}{p(l|Q)},\ \underset{=0}{p(g|Q)}}_{\Sigma=1},\ \underbrace{\underset{=\frac{1}{3}}{p(l|K)},\ \underset{=\frac{2}{3}}{p(g|K)}}_{\Sigma=1}$$



$$P(\circ \mid \circ \cup \bullet) = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$$

$$P(\circ \cup \bullet) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Satz von Bayes

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

"oder"

Seien A und B zwei Zufallsereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten

"und"

$$\mathbb{P}(A),\ \mathbb{P}(B) \text{ und } \mathbb{P}(A \cap B)$$

Falls $\mathbb{P}(B) > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Sind die zwei Zufallsereignisse A und B unabhängig, dann gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

A und B sind <u>unabhängig</u>, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Cournot Duopol mit korrelierten Typen

Beide Firmen können nun

niedrige Grenzkosten ($c_i(q_i) = 0$, Typ $t_i = L$)

und

hohe Grenzkosten ($c_i(q_i) = 4q_i$, Typ $t_i = H$)

haben.

A-priori Verteilung dieser Typen:

	$t_2 = L$	$t_2 = H$	$P(t_1)$
$t_1 = L$	20%	40%	60%
$t_1 = H$	40%	0%	40%
$P(t_2)$	60%	40%	

$$P(t_1 = H) \cdot P(t_2 = H) = 40\% \cdot 40\% \neq 0\% = P(t_1 = H, t_2 = H)$$

Maximierungsproblem der Firma 1 mit Typ $t_1 = H$

Falls Firma 1 vom Typ H ist, $(c_1(q_1) = 4q_1)$, so weiß sie, dass Firma 2 vom Typ L ist:

$$\mathbb{P}(t_2 = L | t_1 = H) = \frac{\mathbb{P}(t_2 = L \;\&\; t_1 = H)}{\mathbb{P}(t_1 = H)} = \frac{40\%}{40\%} = 1$$

Ihr Maximierungsproblem lautet demnach:

$$\max_{q_1 \geq 0} (30 - q_1 - q_2^L)q_1 \ ,$$

wobei q_2^L die Menge von Firma 2 ist, falls $t_2 = L$.

Reaktionsfunktion von Firma 1 mit Typ $t_1 = H$:

$$q_1^H(q_2^L) = 15 - \frac{1}{2}q_2^L$$

Maximierungsproblem von Firma 1 $t_1 = L$

Falls Firma 1 vom Typ L ist, $(c_1(q_1) = 0)$, so weiß sie nicht, welchen Typ Firma 2 hat.

Sie berechnet die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(t_2 = L | t_1 = L)$ und $\mathbb{P}(t_2 = H | t_1 = L)$.

Diese Wahrscheinlichkeiten nennen wir auch „beliefs“.

$$\mathbb{P}(t_2 = L | t_1 = L) = \frac{\mathbb{P}(t_2 = L \ \& \ t_1 = L)}{\mathbb{P}(t_1 = L)} = \frac{20\%}{60\%} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(t_2 = H | t_1 = L) = \frac{\mathbb{P}(t_2 = H \ \& \ t_1 = L)}{\mathbb{P}(t_1 = L)} = \frac{40\%}{60\%} = \frac{2}{3}$$

Firma 1 glaubt also, dass Firma 2 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ die Menge q_2^L spielt und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ die Menge q_2^H.

Maximierungsproblem von Firma 1 mit $t_1 = L$

Firma 1 maximiert den erwarteten Gewinn:

$$\max_{q_1 \geq 0} \frac{1}{3}\left(34 - q_1 - q_2^L\right) q_1 + \frac{2}{3}\left(34 - q_1 - q_2^H\right) q_1$$

Dies können wir vereinfachen zu

$$\max_{q_1 \geq 0} \left(34 - q_1 - \frac{1}{3} q_2^L - \frac{2}{3} q_2^H\right) q_1$$

Bedingung erster Ordnung:

$$34 - 2q_1 - \frac{1}{3} q_2^L - \frac{2}{3} q_2^H \leq 0 \; (= 0, \text{ falls } q_1 > 0)$$

Reaktionsfunktion

$$q_1^L(q_2^L, q_2^H) = \begin{cases} 17 \overbrace{- \tfrac{1}{6} q_2^L - \tfrac{1}{3} q_2^H}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} q_2^L + \frac{2}{3} q_2^H\right)} & \text{falls } \tfrac{1}{3} q_2^L + \tfrac{2}{3} q_2^H < 34 \\ 0 & \text{falls } \tfrac{1}{3} q_2^L + \tfrac{2}{3} q_2^H \geq 34 \end{cases}$$

„Nash Gleichgewicht"

Falls alle Mengen positiv sind müssen im Gleichgewicht alle vier Variablen $q_1^L, q_1^H, q_2^L, q_2^H$ folgende vier Gleichungen erfüllen:

$$q_1^L = 17 - \frac{1}{6}q_2^L - \frac{1}{3}q_2^H \ , \ q_1^H = 15 - \frac{1}{2}q_2^L$$

$$q_2^L = 17 - \frac{1}{6}q_1^L - \frac{1}{3}q_1^H \ , \ q_2^H = 15 - \frac{1}{2}q_1^L$$

Aufgrund von Symmetrie muss aber $q_1^L = q_2^L$ und $q_1^H = q_2^H$ gelten.

$$q^L = 17 - \frac{1}{6}q^L - \frac{1}{3}q^H \ , \ q^H = 15 - \frac{1}{2}q^L$$

Lösung:

$$q^L = 12 \ , \ q^H = 9$$

Statische Bayesianische Spiele und Bayesianisches Nash Gleichgewicht

Baysianische Spiele in Normalform

Das vorangegangene Cournot Duopol unter asymmetrischer Information ist ein bayesianisches Spiel in Normalform.

Im Folgenden definieren wir diese Klasse von Spielen in allgemeinerer Form für zwei Spieler:innen.

Bayesianisches Spiel in Normalform

Definition:
Statisches Bayesianisches Spiel in Normalformdarstellung

$$G = \{A_1, A_2; T_1, T_2; p_1, p_2; u_1, u_2\}$$

Aktionsmengen $\boldsymbol{A}_i$: z.B. $A_i = \{L, R\}$ oder $A_i = \mathbb{R}_{\geq}$

Typenräume $\boldsymbol{T}_i$: z.B. $T_i = \{c_H, c_L\}$

Beliefs $\boldsymbol{p}_i$:

$p_i = p_i(t_j|t_i)$: Wahrscheinlichkeit, dass die andere Spieler:in vom Typ t_j ist, wenn i vom Typ t_i ist.

Auszahlungsfunktion $\boldsymbol{u}_i$:

$u_i : A_1 \times A_2 \times T_1 \times T_2 \to \mathbb{R}$, $u_i(a_1, a_2; t_1, t_2) \in \mathbb{R}$

Harsanyi-Transformation

Die Normalformdarstellung des statischen Bayesianischen Spiels impliziert, dass alle Spieler simultan eine Entscheidung treffen und dass danach das Spiel beendet ist.

John Harsanyi hatte nun die Idee, die Normalformdarstellung aufzugeben und dem Bayesianischen Spiel eine dynamische Struktur zu verleihen, die mit der Methodik aus Kapitel 2 zu analysieren ist.

Hierzu führt Harsanyi eine neutrale Spielerin (die „Natur“ oder „Spielerin 0“) ein, welche als erste zieht und durch einen Zufallszug die Typen aller Spieler:innen festlegt. Diese Spielerin agiert nicht strategisch.

Harsanyi-Transformation

(1) Die „Natur“ zieht die Typen $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$ gemäß gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion („Prior“) $p \in \Delta(T_1 \times T_2)$.

(2) Beide i erfahren ihren eigenen Typ $t_i \in T_i$, nicht aber den der anderen ($t_j \in T_j$).

(3) Beide i wählen simultan Aktionen $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$.

(4) Auszahlungen $u_1(a_1, a_2; t_1, t_2)$ und $u_2(a_1, a_2; t_1, t_2)$ fallen an.

All dies ist Common Knowledge.

Durch diese Struktur wird aus dem Spiel mit **unvollständiger Information** (= Nutzenfunktionen der anderen Spieler:in ist unbekannt) ein Spiel mit **unvollkommener Information** (= Spielverläufe sind unbekannt)

Unterschied zwischen Aktionen und Typen

Die Aktionen aller Spieler:innen und die Typen aller Spieler:innen können den jeweiligen Nutzen der Spieler:innen beeinflussen.

- Die Aktion $a_i \in A_i$ von Spieler:in i wird von Spieler:in i selbst gewählt.
- Der Typ $t_i \in T_i$ von Spieler:in i wird von der Natur zufällig ausgewählt. Die Natur verfolgt hierbei kein Ziel; sie handelt nicht strategisch.

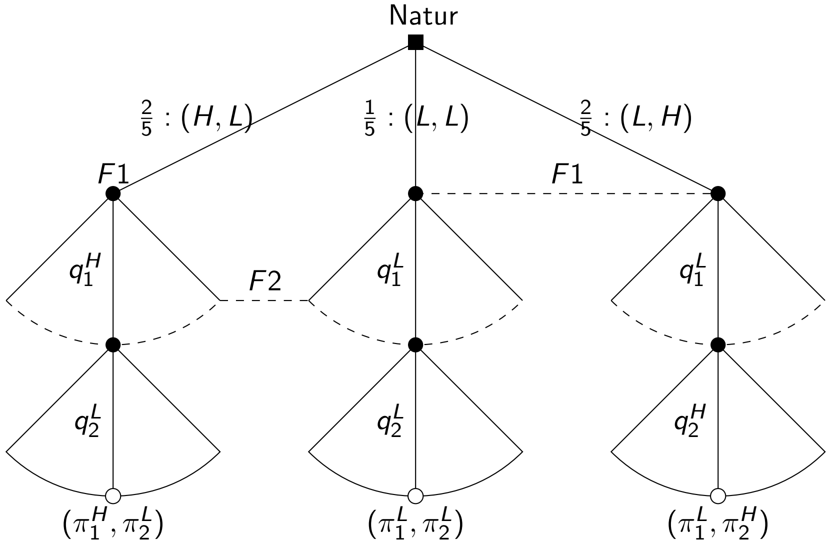
Beispiel: Cournot Duopol

- Typenmengen: $T_1 = T_2 = \{L, H\}$
- Aktionenmenge von 1 und 2: $A_1 = A_2 = \mathbb{R}_{\geq}$
- Prior: $p(t_1 = L, t_2 = L) = \frac{1}{5}, p(t_i = L, t_j = H) = \frac{2}{5}$
- Beliefs:
  $p_i(t_j = L|t_i = H) = 1,\ p_i(t_j = L|t_i = L) = \frac{1}{3}$
  $p_i(t_j = H|t_i = H) = 0,\ p_i(t_j = H|t_i = L) = \frac{2}{3}$
- Auszahlungen (Gewinne):

$$\pi_i(q_1, q_2; t_i) = (34 - q_1 - q_2) \cdot q_i - 1_{\{t_i = H\}} \cdot 4 \cdot q_i$$

$$q_1 \in A_1, q_2 \in A_2, t_i \in T_i$$

Cournot Duopol: Spielbaum



Erwartungsnutzen

Wählt Spieler:in 1 mit Typ $t_1 \in T_1$ die Aktion $a_1 \in A_1$ und geht er/sie davon aus, dass Spieler:in 2 die Aktion $a_2 \in A_2$ wählt, bildet er/sie den bedingten Erwartungsnutzen gegeben seines/ihres Typen t_1 durch

$$U_1(a_1, a_2 | t_1) = \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, a_2; t_1, t_2) \cdot p_1(t_2 | t_1)$$

Analog für Spieler:in 2:

$$U_2(a_1, a_2 | t_2) = \sum_{t_1 \in T_1} u_2(a_1, a_2; t_1, t_2) \cdot p_2(t_1 | t_2)$$

Typen und Aktionen

beobachtet ein:e Spieler:in seinen/ihren Typen, so kann er/sie gleich dreifach daraus lernen:

- Der eigene Typ beeinflusst seinen/ihren eigenen Nutzen.
- Das Wissen um den eigenen Typ erlaubt es die bedingte Wahrscheinlichkeit für die fremden Typen zu berechnen.
  - Auch die anderen Typen können den eigenen Nutzen beeinflussen.
  - Die anderen Typen beeinflussen die Entscheidungen der anderen Spieler:innen.

Deswegen macht es Sinn, dass ein:e Spieler:in die Wahl über seine/ihre Aktion abhängig von seinem/ihrem Typen macht.

Definition: Strategie eines Bayesianischen Spiels

Eine **Strategie** s_i für Spieler i ist eine Funktion

$$s_i : T_i \to A_i, \; t_i \mapsto s_i(t_i) \in A_i,$$

die jedem möglichen Typ $t_i \in T_i$ eine Aktion $a_i \in A_i$ zuordnet.

Erwartungsnutzen mit Strategien

Wählt Spieler:in 1 mit Typ $t_1 \in T_1$ die Aktion $a_1 \in A_1$ und geht er/sie davon aus, dass Spieler:in 2 die Strategie $s_2 : T_2 \to A_2$ wählt, bildet er/sie den bedingten Erwartungsnutzen gegeben seines/ihres Typen t_1 durch

$$U_1(a_1, s_2|t_1) = \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, s_2(t_2); t_1, t_2) \cdot p_1(t_2|t_1)$$

Analog für Spieler:in 2:

$$U_2(s_1, a_2|t_2) = \sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1(t_1), a_2; t_1, t_2) \cdot p_2(t_1|t_2)$$

Def: Bayesianisches Nash Gleichgewicht (BNGG)

Das Strategienpaar $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ heißt **Bayesianisches Nash Gleichgewicht** (in reinen Strategien), wenn für alle $t_1 \in T_1$ die jeweilige Aktion $s_1^*(t_1) \in A_1$ eine Lösung von

$$\max_{a_1 \in A_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_1(a_1, s_2^*(t_2); t_1, t_2) \cdot p_1(t_2 | t_1)$$

ist und wenn für alle $t_2 \in T_2$ die jeweilige Aktion $s_2^*(t_2) \in A_2$ eine Lösung von

$$\max_{a_2 \in A_2} \sum_{t_1 \in T_1} u_2(s_1^*(t_1), a_2; t_1, t_2) \cdot p_2(t_1 | t_2)$$

ist.

Erwartungsnutzen mit Strategien (ohne Beliefs $p_i(t_j|t_i)$)

Es bezeichne S_1 und S_2 die Mengen der reinen Strategien von Spieler:innen 1 und 2.

Wählt Spieler:in 1 die Strategie $s_1 : T_1 \to A_1$ und geht er/sie davon aus, dass Spieler:in 2 die Strategie $s_2 : T_2 \to A_2$ wählt, bildet er/sie den Erwartungsnutzen durch

$$U_1(s_1, s_2) = \sum_{t_1 \in T_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_1(s_1(t_1), s_2(t_2); t_1, t_2) \cdot p(t_1, t_2)$$

Wählt Spieler:in 2 die Strategie $s_2 : T_2 \to A_2$ und geht er/sie davon aus, dass Spieler:in 1 die Strategie $s_1 : T_1 \to A_1$ wählt, bildet er/sie den Erwartungsnutzen durch

$$U_2(s_1, s_2) = \sum_{t_1 \in T_1} \sum_{t_2 \in T_2} u_2(s_1(t_1), s_2(t_2); t_1, t_2) \cdot p(t_1, t_2)$$

Alternative Definition: BNGG (ohne Beliefs $p_i(t_j|t_i)$)

Werden die Erwartungsnutzen für Strategien beider Spieler:innen (und nur mit dem Prior $p(t_1, t_2)$) gebildet reduziert sich die Definition eines Bayesianischen Nash Gleichgewichts zu:

Das Paar von Strategien $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*)$ heißt **Bayesianisches Nash Gleichgewicht** (in reinen Strategien), wenn

$$U_1(s_1^*, s_2^*) \geq U_1(s_1, s_2^*) \text{ für alle } s_1 \in S_1$$

und

$$U_2(s_1^*, s_2^*) \geq U_1(s_1^*, s_2) \text{ für alle } s_2 \in S_2$$

Bayesianisches Spiel in Normalform und Normalformspiel

Ein statisches Bayesianisches Spiel in Normalformdarstellung

$$G^B = \{A_1, A_2; T_1, T_2; p_1, p_2; u_1, u_2\}$$

lässt sich – bei gebenem Prior p, welcher die beiden Beliefs p_1, p_2 induziert – also zu einem Normalformspiel

$$G^N = \{S_1, S_2, U_1, U_2\}$$

reduzieren.

Ein Bayesianisches Nash Gleichgewicht von G^B ist dann ein Nash Gleichgewicht von G^N und umgekehrt.

Spezialfälle

- Die Typen t_1, t_2 sind unabhängig:

$$p(t_1, t_2) = p(t_1) \cdot p(t_2) \;\Rightarrow\; p_i(t_j | t_i) = p(t_j)$$

- Die Nutzenfunktion hängt nur vom eigenen Typ ab:

$$u_i(a_1, a_2; t_1, t_2) = u_i(a_1, a_2; t_i)$$

- Die Nutzenfunktion hängt nicht von den Typen ab:

$$u_i(a_1, a_2; t_1, t_2) = u_i(a_1, a_2)$$

$\rightarrow$ die Typen können zur Korrelation von Aktionen genutzt werden.

Korreliertes Gleichgewicht (Aumann 1987)

Betrachtet seien Spiele mit

- $A_1 = T_1$ und $A_2 = T_2$ und
- $u_i(a_1, a_2; t_1, t_2) = u_i(a_1, a_2)$ für beide $i = 1, 2$ und alle $a_1, t_1 \in T_1$ und $a_2, t_2 \in T_2$.

Ein Prior $p \in \Delta(T_1 \times T_2)$ heißt **korreliertes Gleichgewicht**, falls $s_i(t_i) = t_i$ für alle $t_i \in T_i$ und $i = 1, 2$ ein Bayesianisches Nash Gleichgewicht ist.

In einem korrelierten Gleichgewicht können die Entscheidungen über die gemeinsame Typenverteilung also korreliert sein.

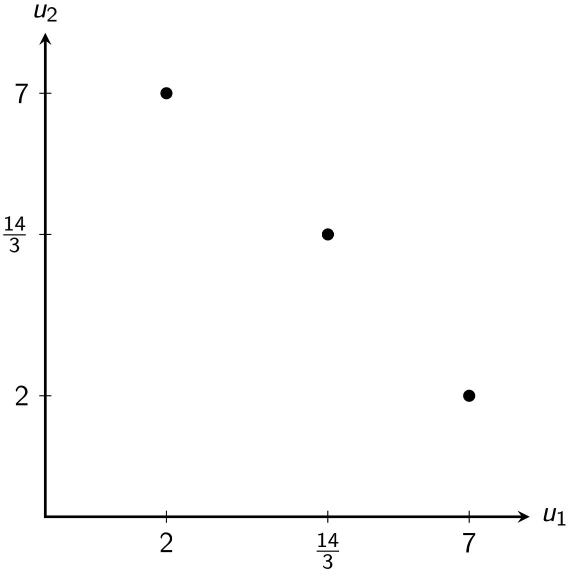
Beispiel: Chicken–Game

		(2)	
		Dare	Chicken
(1)	Dare	0 , 0	7 , 2
	Chicken	2 , 7	6 , 6

Reine NGGs:

gemischtes NGG:

Gleichgewichtsauszahlungen bei Chicken



Beispiel: Chicken–Game

(2)

(1)		Dare	Chicken
	Dare	0 , 0 0	7 , 2 $1/3$
	Chicken	2 , 7 $1/3$	6 , 6 $1/3$

Prior p: $p(D,D) = 0,\ p(C,D) = p(D,C) = p(C,C) = \frac{1}{3}$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$p(D|D) = 0,\ p(C|D) = 1,\ p(D|C) = \frac{1}{2},\ p(C|C) = \frac{1}{2}$

Beispiel: Chicken–Game

Nehme an, dass (2) die Strategie $s_2(C) = C$ und $s_2(D) = D$ spielt.

Fall: (1) bekommt den Typen D

$p(D|D) = 0,\ p(C|D) = 1$:
(1) weiß, dass (2) den Typ C hat und C spielt.
D ist beste Antwort auf C ($\rightarrow$ Auszahlung 7).

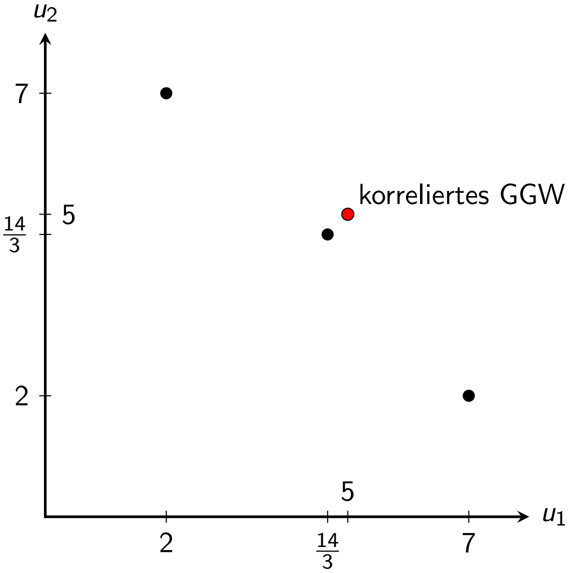
Fall: (1) bekommt den Typen C

$p(D|C) = \frac{1}{2},\ p(C|C) = \frac{1}{2}$:
Beide Typen von (2) sind gleich wahrscheinlich.
Es ist, als ob (2) die gemischte Strategie $\frac{1}{2} \cdot D + \frac{1}{2} \cdot C$ spielt.

Wenn (1) D spielt: Auszahlung $\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2}$
Wenn (1) C spielt: Auszahlung $\frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}6 = 4$

$\Rightarrow$ die Strategie $s_1(D) = D$, $s_1(C) = C$ ist optimal für (1).

Gleichgewichtsauszahlungen bei Chicken



Korreliertes Gleichgewicht

- Im korrelierten Gleichgewicht haben die Typen keinen direkten Einfluss auf die Nutzenzahlen.
- Die Typen dienen als Möglichkeit zur Koordinierung (Korrelation) der Entscheidungen.
- Ein korreliertes Gleichgewicht eines Normalformspiels ist ein Bayesianisches Nash Gleichgewicht eines Bayesianischen Spiels.
- Im korrelierten Gleichgewicht sind Auszahlungsvektoren außerhalb der konvexen Hülle der Nash Gleichgewichtsauszahlungen möglich.
- Jedes Nash Gleichgewicht ist ein korreliertes Gleichgewicht.
- Nicht jedes korrelierte Gleichgewicht ist ein Nash Gleichgewicht.

Schlüsselwörter in Kapitel 3.2

- Unvollständige Information
- Typen-abhängige Nutzenfunktion
- Bayesianisches Spiel in Normalform
- Harsanyi-Transformation
- A-Priori Wahrscheinlichkeit („Prior“)
- Beliefs: bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Bayesianisches Nash Gleichgewicht (BNGG)
- Korreliertes Gleichgewicht

Anwendungen

Das 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen

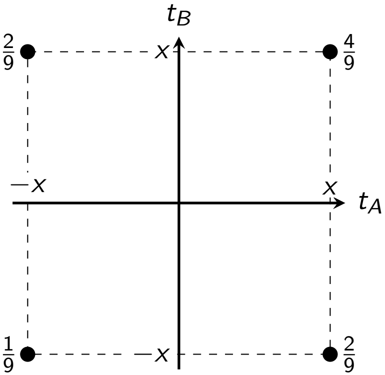
Anne \ Ben	1L	e*
1L	$2 + t_A$, 1	0 , 0
e*	0 , 0	1 , $2 + t_B$

t_A, t_B: Typen von Anne bzw. Ben

Die Typen können die Werte $-x$ und x annehmen, wobei x eine kleine positive Zahl sei.

Das 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen

Die Natur zieht die Typen t_A und t_B von Anne und Ben mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:



Beliefs im 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen

Die Beliefs von Anne und Ben berechnen sich wie folgt:

$$p_i(t_j = -x | t_i = -x) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$p_i(t_j = -x | t_i = x) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}$$

Entsprechend ergibt sich jeweils

$$p_i(t_j = x | t_i = x) = \frac{2}{3} \text{ für } t_i \in \{-x, x\}$$

In diesem Spiel hängen die Beliefs über den Typen des/der anderen Spieler:in also nicht vom eigenen Typen ab.

Die beiden Typen werden in diesem Spiel von der Natur unabhängig gezogen.

Strategien im 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen

Eine Strategie ordnet jedem Typen von Anne bzw. Ben eine Aktion von Anne bzw. Ben zu:

$$s_i : \{-x, x\} \to \{1L, e^*\}$$

Zum Beispiel:

$$s_B(-x) = 1L \text{ und } s_B(x) = e^*$$

Das 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen

Behauptung

Folgende Strategien sind ein Bayesianisches Nash Gleichgewicht:

$$s_A(t_A) = \begin{cases} 1L & \text{, falls } t_A = x \\ e^* & \text{, falls } t_A = -x \end{cases} \qquad s_B(t_B) = \begin{cases} e^* & \text{, falls } t_B = x \\ 1L & \text{, falls } t_B = -x \end{cases}$$

Induzierte gemischte Strategien

Wenn Bob der Strategie s_B folgt, sieht es für Anne so aus, als ob Bob die gemischte Strategie

$$\frac{1}{3} \cdot 1L + \frac{2}{3} \cdot e^*$$

spielen würde.

Das 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen

Der Erwartungsnutzen von Anne, gegeben der Strategie s_B und ihrem Typ t_A ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} U_A(1L, s_B | t_A) &= \frac{1}{3} \cdot (2 + t_A) \\ U_A(e^*, s_B | t_A) &= \frac{2}{3} \cdot 1 \end{aligned}$$

Anne präferiert $1L$ gegenüber e^*, falls

$$\frac{1}{3} \cdot (2 + t_A) \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow t_A = x$$

Die Argumentation für Bob ist analog:

Falls Anne s_A spielt, präferiert Bob e^* gegenüber $1L$, falls $t_B = x$.

Das 1Live/eldoradio*-Spiel mit Typen: Purification

Wir können also das Spielen von gemischten Strategien im 1Live/eldoradio*-Spiel ohne Typen durch das Spielen von reinen Strategien in diesem Spiel mit Typen motivieren.

Dieses Resultat nennt man auch „**purification**“:

Gemischte Strategien können durch reine („pure“) Strategien eines Bayesianischen Spiels mit geringer Unsicherheit erklärt werden.

Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

- Zwei Spieler:innen: Anne und Ben
- Jede:r kann entweder beitragen („b“) oder nicht („n“)
- Falls mindestens eine:r beiträgt, wird das öffentliche Gut bereitgestellt $\rightarrow$ je Nutzen 1 für Anne und Ben
- Beide Spieler:innen haben Kosten c_i der Bereitstellung
- Es sind jeweils nur die eigenen Kosten bekannt.
- c_i nimmt die Werte $0, 1$ und 2 je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ unabhängig von c_j an.
- Beide Spieler:innen beobachten ihren Kostenparameter und entscheiden danach simultan.

Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

Anne \ Ben	b	n
b	$1 - c_1$, $1 - c_2$	$1 - c_1$, 1
n	1 , $1 - c_2$	0 , 0

Typ & Belief:

$$c_i \in \{0,1,2\},\ p_i(c_j|c_i) = \frac{1}{3} \text{ für alle } c_i, c_j \in \{0,1,2\}$$

Nutzen:

$$u_i(a_i, a_j|c_i) = \mathbb{1}_{\{a_i=b \vee a_j=b\}} - c_i \cdot \mathbb{1}_{\{a_i=b\}}$$

Strategie:

$$s_i : \{0,1,2\} \to \{b, n\}$$

Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

Nehme an, dass Ben folgende Strategie wählt:

$$s_B(c_B) = \begin{cases} b & \text{falls } c_B = 0 \\ n & \text{falls } c_B > 0 \end{cases}$$

Was ist hierauf die beste Antwort von Anne?

$$\begin{aligned} U_A(b, s_B|c_A) &= 1 - c_A \\ U_A(n, s_B|c_A) &= p_A\,(c_B = 0|c_A) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Anne wählt beitragen, falls

$$1 - c_A \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow c_A \leq \frac{2}{3} \Rightarrow c_A = 0$$

Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

Falls Anne die Strategie

$$s_A(c_A) = \begin{cases} b & \text{falls } c_A = 0 \\ n & \text{falls } c_A > 0 \end{cases}$$

wählt, ist entsprechend die Strategie

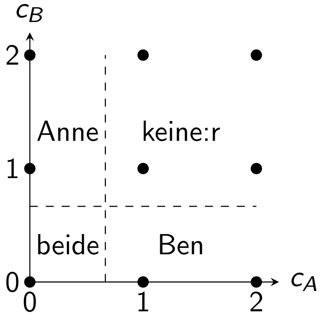
$$s_B(c_B) = \begin{cases} b & \text{falls } c_B = 0 \\ n & \text{falls } c_B > 0 \end{cases}$$

die beste Antwort von Ben.

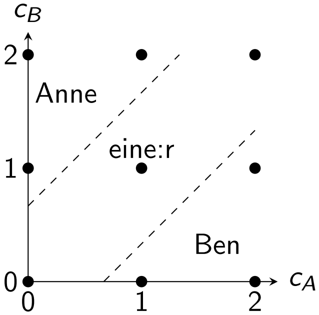
Demnach sind diese beiden Strategien s_A und s_B ein BNGG.

Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

Wer stellt im BNGG bereit?



Wer sollte bereit stellen?



Im BNGG ist die Bereitstellung des öffentlichen Gutes nicht immer effizient!

Vorschlag: (Vickrey-Clark-Groves-Mechanismus)

Anne und Ben behaupten zu Beginn des Spiels simultan, dass ihre Kostenparameter $\hat{c}_A$ bzw. $\hat{c}_B$ betragen.

Anne und Ben sind hierbei nicht an die Wahrheit gebunden, d.h. es muss nicht $\hat{c}_i = c_i$ gelten.

Falls $\hat{c}_A \geq \hat{c}_B$:

- Ben muss das Gut bereitstellen.
- Anne muss $\hat{c}_B$ verbrennen.

Falls $\hat{c}_B > \hat{c}_A$:

- Anne muss das Gut bereitstellen.
- Ben muss $\hat{c}_A$ verbrennen.

Angenommen, Ben berichtet wahrheitsgemäß $\hat{c}_B = c_B$

Welches $\hat{c}_A$ sollte Anne berichten?

$$\begin{aligned} U_A(\hat{c}_A = 0, s_B | c_A) &= \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=0}(1-0) + \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=1}(1-c_A) + \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=2}(1-c_A) \\ &= 1 - \frac{2}{3}c_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_A(\hat{c}_A = 1, s_B | c_A) &= \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=0}(1-0) + \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=1}(1-1) + \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=2}(1-c_A) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}c_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_A(\hat{c}_A = 2, s_B | c_A) &= \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=0}(1-0) + \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=1}(1-1) + \overbrace{\frac{1}{3}}^{c_B=2}(1-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht des Bayesianischen Spiels mit dem VCG-Mechanismus

- ... sagen Anne und Ben immer die Wahrheit
- ... wird das öffentliche Gut immer effizient bereitgestellt
- ... verbrennen Anne und Ben Geld!

Das Gesamtergebnis ist also nicht effizient.

First-Price Sealed-Bid Auction („Erstpreis Auktion“)

- zwei Bieterinnen $i = 1, 2$
- jede Bieterin besitzt eine Wertschätzung t_i des zu versteigernden Gutes:
  Falls i den Preis p bezahlt, ist ihre Auszahlung $t_i - p$.
- t_1, t_2 seien unabhängig und uniformverteilt auf $[0, 1]$.
- Die Bieterinnen bieten simultan $a_i \in \mathbb{R}_{\geq}$.
- Die Bieterin mit dem höchsten Gebot erhält das Gut und bezahlt ihr Gebot.
- Die andere Bieterin erhält nichts und bezahlt nichts.
- Bei gleichen Geboten entscheidet das Los.

Die Erstpreis Auktion als Bayesianisches Spiel

Aktionen: $A_i = \mathbb{R}_{\geq},\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2$

Typen: $T_i = [0, 1],\ t_i \in T_i,\ i = 1, 2$

Beliefs: i weiß, dass t_j unabh. uniformverteilt auf $[0, 1]$ ist.

Auszahlungsfunktion:

$$u_i(a_1, a_2; t_i) = \begin{cases} t_i - a_i & \text{, falls } a_i > a_j \\ \frac{1}{2}(t_i - a_i) & \text{, falls } a_i = a_j \\ 0 & \text{, falls } a_i < a_j \end{cases}$$

Strategien: $s_i : T_i \to A_i$, also $s_i(t_i) \in \mathbb{R}_{\geq}$ für $t_i \in [0, 1]$

Erstpreis Auktion: Erwartungsnutzen

Falls Bieterin j die Strategie s_j benutzt, ist der Erwartungsnutzen von i bei Gebot $a_i \geq 0$ und Wertschätzung $t_i \in [0,1]$ gegeben durch:

$$\begin{array}{rcccl} U_i(a_i, s_j|t_i) & = & (t_i - a_i) & \cdot & prob(a_i > s_j(t_j)) \\ & + & \frac{1}{2}(t_i - a_i) & \cdot & prob(a_i = s_j(t_j)) \\ & + & 0 & \cdot & prob(a_i < s_j(t_j)) \end{array}$$

Falls Bieterin j eine streng monotone Strategie s_j benutzt, ist $prob(a_i = s_j(t_j)) = 0$, und der Erwartungsnutzen vereinfacht sich zu

$$U_i(a_i, s_j|t_i) = (t_i - a_i) \cdot prob(a_i > s_j(t_j))$$

Erstpreis Auktion: Bayesianisches Nash Gleichgewicht

Ein Profil von streng monotonen Strategien (s_1^*, s_2^*) ist ein BNGG der Erstpreis Auktion, falls $s_i^*(t_i)$ für jedes $t_i \in [0, 1]$ das Problem

$$\max_{a_i \geq 0} (t_i - a_i) \cdot prob(a_i > s_j^*(t_j))$$

löst.

Behauptung:

Die Strategie $s_i^*(t_i) = \frac{1}{2} t_i$ für $i = 1, 2$ konstituiert ein BNGG.

Beweis: $s_i^*(t_i) = \frac{1}{2}t_i$, $i = 1, 2$ ist BNGG

$$U_i(a_i, s_j^*; t_i) = (t_i - a_i) \cdot prob(a_i > s_j^*(t_j))$$

Gewinnwahrscheinlichkeit:

$$prob\left(a_i > \frac{1}{2}t_j\right) = prob(2a_i > t_j) = \min\{2a_i, 1\}$$

Da für $a_i > \frac{1}{2}$ die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht steigt (die potentiellen Kosten aber schon), ist $a_i > \frac{1}{2}$ durch $a_i = \frac{1}{2}$ strikt dominiert.

$$\Rightarrow \max_{0 \le a_i \le \frac{1}{2}} (t_i - a_i) \cdot 2a_i$$

Bedingung erster Ordnung für $a_i^* \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$-2a_i^* + 2(t_i - a_i^*) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow a_i^* = \frac{1}{2}t_i \in [0, \frac{1}{2}] \checkmark$$

Schlüsselwörter in Kapitel 3.3

- Purification
- Bereitstellung eines öffentlichen Gutes
- Erstpreisauktion