Übungsaufgaben zu Einführung in die Spieltheorie
Sommersemester 2025

Kapitel 3: Statische Spiele unter unvollständiger Information

Kapitel 3.1: Einführendes Beispiel

Aufgabe 22

Betrachten Sie ein Cournot-Duopol Spiel mit linearer Nachfrage unter unvollständiger Information über die jeweiligen Stückkosten. Im Gegensatz zu dem der Vorlesung behandelten Fall, nehmen Sie an, daß jede der beiden Firmen unabhängig mit Wahrscheinlichkeit θ Stückkosten in Höhe von c_H, und mit Wahrscheinlichkeit $1-\theta$ Stückkosten in Höhe von c_L, hat (wobei $c_H > c_L$). Wie lautet das symmetrische Bayesianische Nashgleichgewicht? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der Vorlesung.

Aufgabe 23

Betrachten Sie ein Cournot Duopol mit linearer (inverser) Nachfrage $P(Q) = a - Q$, wobei $Q = q_1 + q_2$. Die Stückkosten seien für beide Firmen gleich $c > 0$. Der Nachfrageparameter a ist unsicher: es gilt $a = a_H$ mit W'keit θ und $a = a_L$ mit W'keit $1-\theta$, wobei $a_H > a_L > 0$. Firma 1 weiß, welches von beiden gilt, aber Firma 2 nicht. All dies ist common knowledge. Die Firmen wählen simultan ihre jeweiligen Mengen. Wie lauten die Strategienräume? Bestimmen Sie das Bayesianische Nashgleichgewicht dieses Spiels. Unter welchen Bedingungen sind alle Gleichgewichtsmengen positiv?

Aufgabe 24

Betrachten Sie das folgende Bertrand Duopolspiel mit differenzierten Gütern. Die Nachfrage nach dem Gut von Firma i lautet $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b_i \cdot p_j$. Die Kosten seien der Einfachheit halber gleich 0 für beide Firmen. Die Firmen sind nur unvollständig über den Parameter b_i informiert, d.h. b_i nimmt mit W'keit θ den Wert b_H, und mit W'keit $1-\theta$ den Wert b_L an, wobei $b_H > b_L > 0$ und b_i, unabhängig von b_j ist. Jede Firma kennt ihr eigenes b_i, aber nicht das des Wettbewerbers. Bestimmen Sie die Menge der Aktionen, Typen, beliefs, Strategien und die Nutzenfunktionen in diesem Spiel. Bestimmen Sie ein symmetrisches Bayesianisches Nashgleichgewicht. Welche Bedingungen müssen b_H, b_L und θ erfüllen, damit die Preise positiv sind?

Kapitel 3.2: Statische Bayesianische Spiele und Bayesianisches Nash Gleichgewicht

Aufgabe 25

Bob hat sich in Anna verliebt. Die beiden überlegen, was sie am Wochenende machen könnten. Die Wahl ist zwischen Fußballspiel und Theater. Da er sie noch nicht so gut kennt, weiß er nicht genau, wieviel ihr daran liegt, etwas mit ihm zu unternehmen. Falls ihr viel an ihm liegt, dann spielen sie das folgende „Battle of the Sexes“-Spiel (er ist der Zeilenspieler, sie die Spaltenspielerin):

	F	T
F	3,1	0,0
T	0,0	1,3

Es wäre aber auch möglich, dass Anna gar nichts an einer gemeinsamen Unternehmung mit Bob liegt (d.h. sie ist nicht in ihn verliebt). In diesem Fall spielen sie das folgende Spiel (er ist der Zeilenspieler, sie die Spaltenspielerin):

	F	T
F	3,0	0,3
T	0,1	1,0

Bob vermutet, dass Anna mit Wahrscheinlichkeit μ auch in ihn verliebt ist, d.h. sie spielen das erste Spiel; andernfalls spielen sie das zweite Spiel. Es gilt $0 < \mu < 1$. Anna weiß, ob sie in Bob verliebt ist. Wie lauten die Bayesianischen Nashgleichgewichte in reinen Strategien?

Aufgabe 26

Betrachten Sie eine first-price, sealed-bid Auktion mit n Bietern. Die Wertschätzungen v_i $i = 1, ..., n$ der Bieter seien unabhängig und gleichverteilt auf dem Interval $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Strategien $b_i(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i$ ein symmetrisches Bayesianisches Nashgleichgewicht bilden.

Kapitel 3.3: Anwendungen

Aufgabe 27

Zwei gegnerische Armeen sind bereit dazu, eine Stadt zu erobern. Jeder der beiden feindlichen Generäle kann entweder „angreifen“ oder „nicht angreifen“. Jede der beiden Armeen ist entweder „stark“ oder „schwach“, wobei beides gleichwahrscheinlich ist und die Realisierungen für die jeweiligen Armeen unabhängig sind. Jeder der beiden Generäle weiß um die Stärke (oder Schwäche) der eigenen Armee, nicht aber um die des Gegners. Die Auszahlungen sind wie folgt:

Wird die Stadt erobert, so ist der Wert davon $M > 0$. Um die Stadt zu erobern muss eine Armee angreifen. Dabei ist sie erfolgreich entweder wenn die gegnerische Armee nicht angreift, oder wenn die eigene Armee stark und die des Gegners schwach ist. Falls zwei gleichstarke Armeen angreifen, erobert keine von beiden die Stadt. Jede Armee hat Kosten, falls sie kämpfen muss, und zwar in Höhe von s, falls sie stark ist, und in Höhe von w, falls sie schwach ist, wobei $0 < s < w$. Falls der Gegner nicht angreift, entstehen keine Kosten. Bestimmen Sie die Menge der Bayesianischen Nashgleichgewichte in reinen Strategien. Betrachten Sie dabei die folgenden vier möglichen Parameterkonstellationen: ($M > w$ und $M/2 > s$), ($M > w$ und $s > M/2$), ($w > M > s$ und $M/2 > s$) sowie ($w > M > s$ und $s > M/2$).

Aufgabe 28

Bestimmen Sie alle Bayesianischen Nashgleichgewichte in reinen Strategien des folgenden Spiels: Zunächst bestimmt die Natur, ob die Auszahlungen wie in Spiel I oder wie in Spiel II sind, wobei beide Spiele gleichwahrscheinlich sind. Spieler 1 erfährt, welches Spiel ausgewählt wurde; Spieler 2 erfährt dies nicht. All dies ist common knowledge. Dann wählen beide Spieler simultan ihre jeweilige Aktion (Spieler 1 wählt T oder B, Spieler 2 wählt L oder R).

Spiel I:

	L	R
T	1,1	0,0
B	0,0	0,0

Spiel II:

	L	R
T	0,0	0,0
B	0,0	2,2