Übungsaufgaben zu Einführung in die Spieltheorie
Sommersemester 2025

Kapitel 2 Dynamische Spiele unter vollständiger Information

2.1 Dynamische Spiele unter vollständiger und vollkommener Information

Aufgabe 16

Betrachte das in der Vorlesung behandelte Verhandlungsspiel, in dem sich zwei Spieler abwechselnd Vorschläge über die Aufteilung eines Geldbetrages (normiert auf 1€) unterbreiten. Nehme an, das Spiel geht über fünf Runden, d.h. jeder Spieler unterbreitet zweimal ein Angebot. In der fünften Runde wird die Aufteilung $(s, 1-s)$ realisiert, wobei $s \in [0,1]$ exogen gegeben ist. Der Diskontierungsfaktor betrage für beide Spieler $\delta = 0.75$. Für welchen Wert von s ist der folgende Ausgang des Verhandlungsspiels das Ergebnis der Rückwärtsinduktion: Spieler 1 schlägt in der ersten Runde die Aufteilung $(1/2, 1/2)$ vor und Spieler 2 akzeptiert?

Aufgabe 17

In einer Vorstandssitzung soll eine Delegierte bestimmt werden. Der Vorstand besteht aus drei Personen $(i = 1, 2, 3)$. Es haben sich vier Kandidatinnen (A, B, C, D) zur Wahl gestellt. Der Vorstand wählt aus diesen eine aus, indem nacheinander jedes Vorstandsmitglied eine Kandidatin von der Liste streicht, d.h. das letzte Vorstandsmitglied hat nur noch die Wahl zwischen zwei Kandidatinnen. Nehme an, dass die Vorstandsmitglieder in der Reihenfolge 1,2,3 je eine Kandidatin streichen.

a) Stelle das Spiel als Spielbaum dar.

b) Wieviele Entscheidungsmöglichkeiten hat jede der Spielerinnen 1,2 und 3?

c) Nehme an, die Vorstandsmitglieder haben folgende Präferenzen:

$$1 : A \succ B \succ C \succ D \ ; \ 2 : B \succ C \succ D \succ A \ ; \ 3 : C \succ D \succ A \succ B.$$

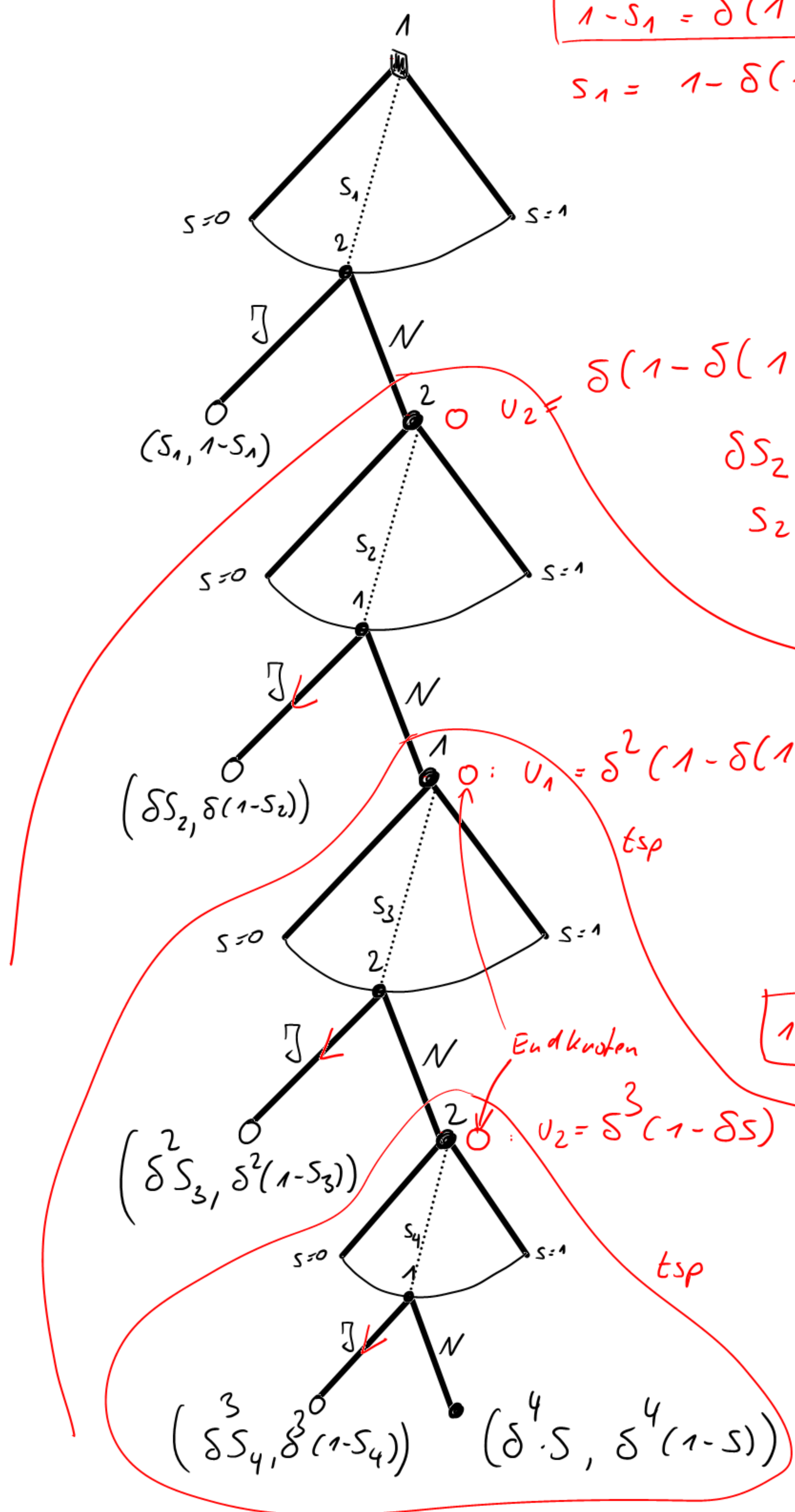
Wie lauten die Rückwärts-Induktions-Ergebnisse, d.h. welche der Kandidatinnen A, B, C, D können Delegierte werden?

d) Sind die Rückwärtsinduktionsergebnisse Teile von Nash Gleichgewichten?
Gibt es noch andere Nash Gleichgewichte?

e) Wie würden sich die Antworten auf c) und d) ändern, falls die Präferenzordnung von Spielerin 3 folgendermaßen lautet: $C \succ D \succ B \succ A$?

Aufgabe 18

Zwei Geschäftspartner arbeiten an einem gemeinsamen Projekt. Wenn das Projekt erfolgreich abgeschlossen wird, erhält jeder der beiden einen Betrag von $V > 0$. Es fehlt ihnen zur Zeit ein Betrag R, um das Projekt abzuschließen. Keiner der beiden ist willens, sich vertraglich auf einen Kostenbeitrag festzulegen. Deswegen beschließen die beiden, folgendes Spiel zu spielen: In der ersten Runde entscheidet Spielerin 1, wie viel sie bereit ist, in das Projekt zu investieren; dieser Betrag sei mit $I_1 \geq 0$ bezeichnet. Falls $I_1 \geq R$, ist das Spiel vorbei und das Projekt erfolgreich beendet (mit Erlös V für beide). Falls $I_1 < R$, hat Spieler 2 in der zweiten Runde die Möglichkeit $I_2 \geq 0$ zu investieren. Falls $I_1 + I_2 \geq R$, kann das Projekt erfolgreich beendet werden



$$\boxed{1 - s_1 = \delta(1-\delta(1-\delta(1-\delta s)))}$$

$$s_1 = 1-\delta(1-\delta(1-\delta(1-\delta s)))$$

$$U_2 = \delta(1-\delta(1-\delta(1-\delta s)))$$

$$\delta s_2 = \delta^2(1-\delta(1-\delta s))$$

$$s_2 = \delta(1-\delta(1-\delta s))$$

$$U_1 = \delta^2(1-\delta(1-\delta s))$$

tsp

$$\delta^2(1-s_3) = \delta^3(1-\delta s)$$

$$1-s_3 = \delta(1-\delta s)$$

$$\boxed{1-\delta(1-\delta s) = s_3}$$

Endknoten

$$U_2 = \delta^3(1-\delta s)$$

tsp

$$\delta^3 s_4 = \delta^4 s$$

$$\Leftrightarrow \boxed{s_4 = \delta s}$$

$$U_2 = \delta^3(1-\delta s)$$

$$\boxed{1-S_1 = \delta(1-\delta(1-\delta(1-\delta S)))}$$

Löse diese Gleichung für $1-S_1 = \frac{1}{2}$

und $\delta = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} = \delta - \delta^2 + \delta^3 - \delta^4 \cdot S$$

$$\frac{27\cdot 4}{108}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} + \frac{27}{64} - \frac{81}{256}\cdot S$$

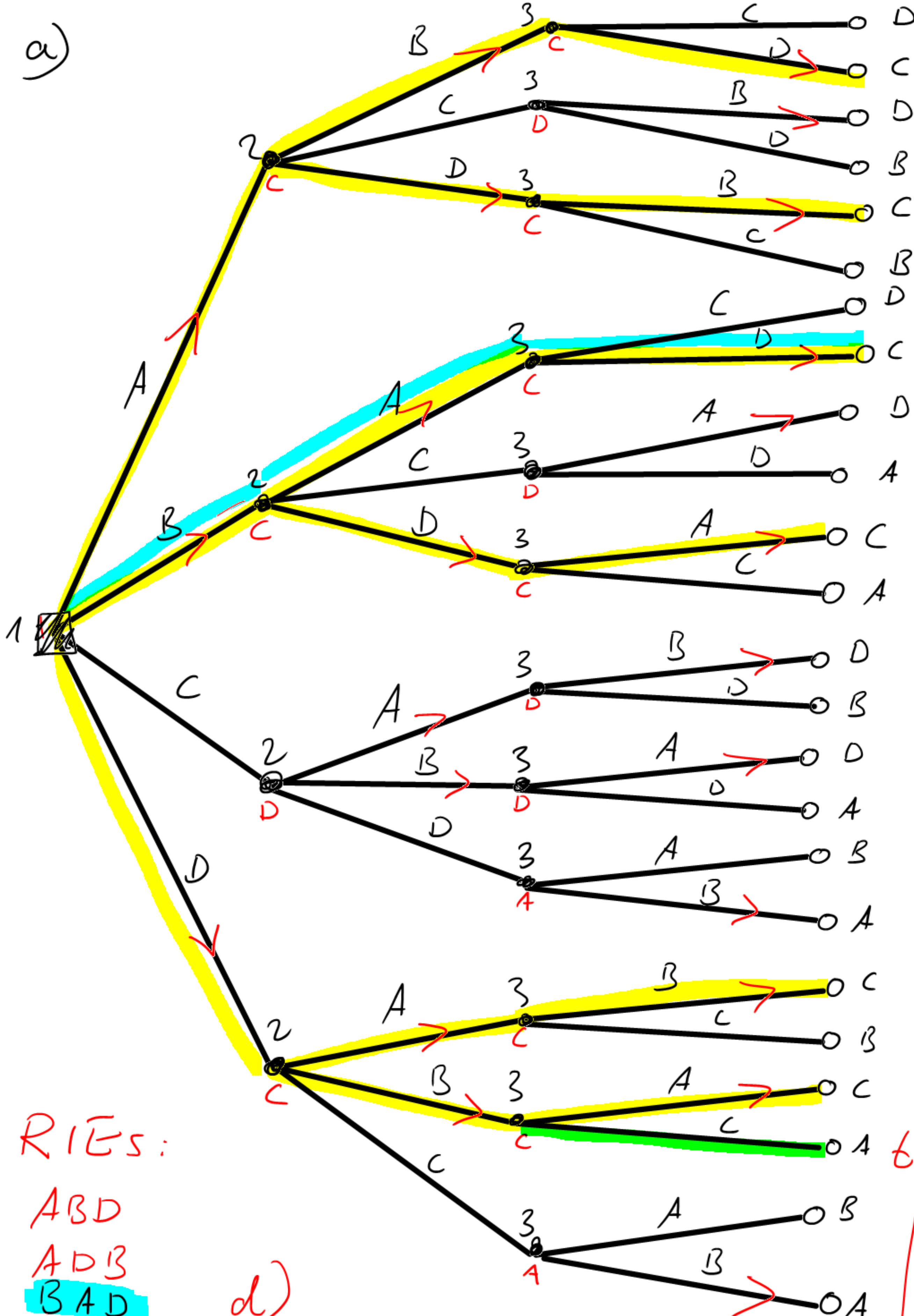
$$\frac{128}{256} = \frac{3\cdot 64}{256} - \frac{9\cdot 16}{256} + \frac{27\cdot 4}{256} - \frac{81}{256}\cdot S$$

$$81 S = 3\cdot 64 - 9\cdot 16 + 27\cdot 4 - 128$$

$$= \underbrace{192 - 144}_{48} + \underbrace{108 - 128}_{-20}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{28}{81}}$$

a)



RIEs:

ABD
ADB
BAD
BDA
DAB
DBA

d)

tsp N66

(B, BAAA, DBBDAABABBAB)

N66

B, BAAA, DBBDAABABBCB

b) $S_1 = \{A, B, C, D\}$

$S_2 = \{BAAA, BAAB, BAAC$

.....

mit $|S_2| = 3^4 = 81$

$S_3 = \{CBBCAABAABAA, \ldots$

$|S_3| = 2^{12}$

(wieder mit Erlös V für beide). Die Kosten einer Investition I sei für beide Spieler durch $c(I) = I^2$ gegeben. Im Gegensatz zu Spieler 2 ist Spielerin 1 ungeduldig, d.h. sie habe einen Diskontierungsfaktor $\delta \in (0,1)$ für Erlöse, die erst in der zweiten Runde anfallen. Wie lautet das Ergebnis der Rückwärtsinduktion dieses Spiels in Abhängigkeit von V, R und δ?

Aufgabe 19

Betrachte das Modell der Vorlesung, in dem in zwei Ländern zunächst ein Zolltarif t_i festgelegt wird, woraufhin zwei repräsentative Firmen auf den Märkten in den beiden Ländern ein Cournot-Spiel spielen (vgl. Gibbons 2.2.C).

a) Berechne die aggregierte Wohlfahrt (=Konsumentenrente+Profite der Firmen + Zolleinnahmen) im teilspielperfekten Gleichgewicht.

b) Nehme an, dass Zölle auch negativ sein dürften (d.h. Import darf subventioniert werden). Zeige, dass unter allen Paaren (t_1, t_2) mit $t_1 = t_2$ die Subventionsraten $t_i = -30$ optimal sind (d.h. die aggregierte Wohlfahrt $W_1^*(t_1, t_2) + W_2^*(t_1, t_2)$ maximieren). Was ist das Ergebnis des Wettbewerbs der Firmen unter diesen Umständen? Warum ist dies kein Gleichgewicht?

c) Wie lauten die optimalen Tarife $t_1 = t_2$, falls $t_i \geq 0$ gelten muss? Wie sieht nun der Wettbewerb zwischen den Firmen aus? Warum ist dies kein Gleichgewicht?

Aufgabe 20 (Nimm Spiel) – b) & c) sehr schwer!

Im Spiel „Nimm“ gibt es zwei Haufen von Streichhölzern, wobei sich im ersten Haufen $h_1 > 0$ Hölzer befinden, im zweiten $h_2 > 0$. Die beiden Spielerinnen nehmen abwechselnd eine beliebige Anzahl von Hölzern, mindestens jedoch eines, von *einem* der beiden Haufen (man darf also nie von beiden Haufen gleichzeitig nehmen). Diejenige Spielerin, die das letzte Holz nimmt, gewinnt.

a) Stelle das Spiel in Extensivform für folgende Fälle dar und bestimme, wer jeweils gewinnt: $(h_1, h_2) = (1, 1)$, $(h_1, h_2) = (2, 1)$ und $(h_1, h_2) = (2, 2)$.

b) Wer gewinnt für beliebige Anzahlen $h_1 = h_2$? Wer gewinnt für beliebige Anzahlen $h_1 \neq h_2$?

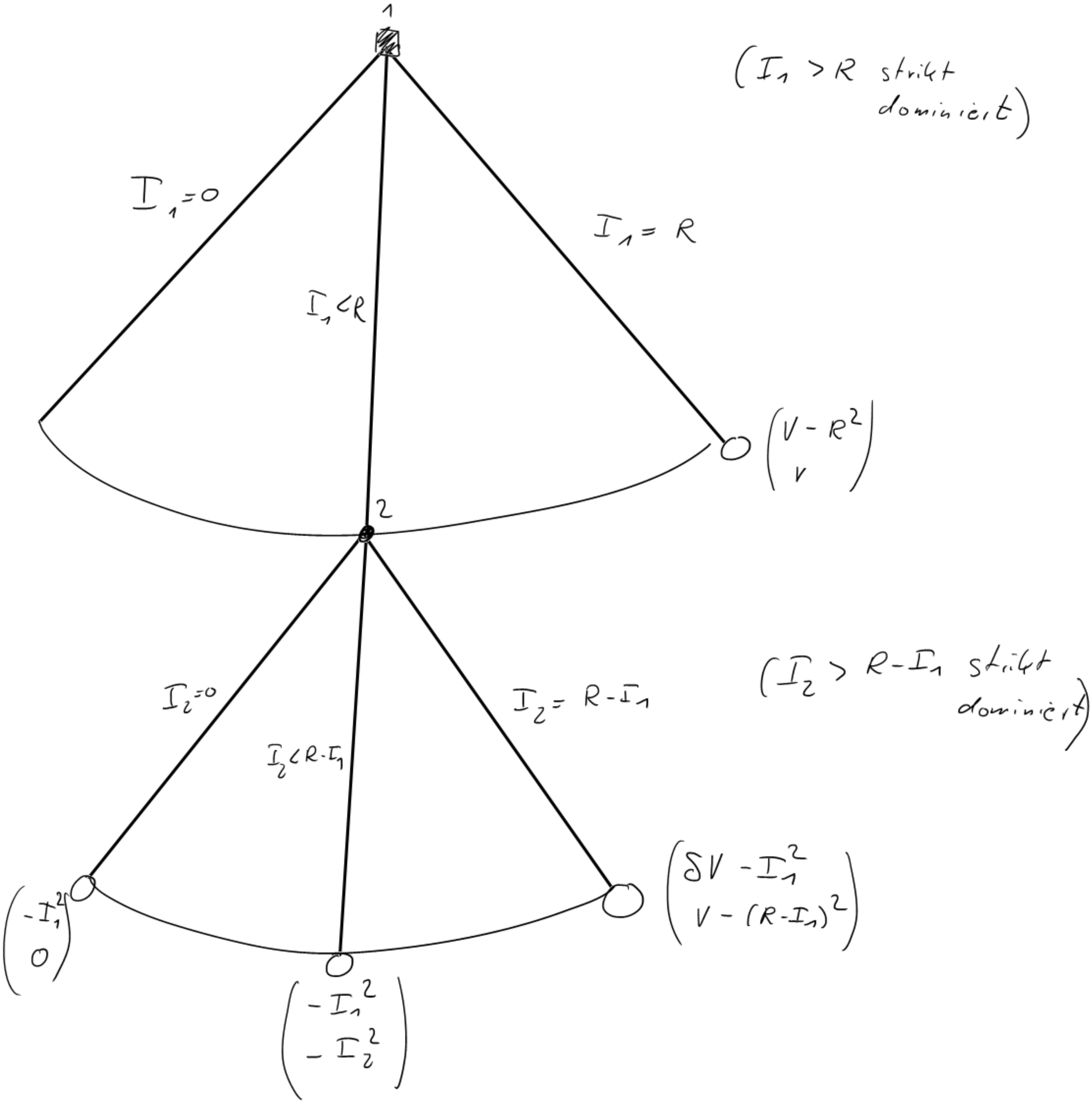
c) Wer gewinnt, falls es drei statt zwei Haufen gibt (und sonst die gleichen Regeln gelten)?

Aufgabe 21

Das folgende Normalformspiel werde zweimal hintereinander gespielt, wobei beide Spieler vor der zweiten Runde wissen, wie in der ersten Runde gespielt wurde. Die Auszahlungen des wiederholten Spiels sind die Summe der Auszahlungen der beiden Stufenspiele.

	P_2	Q_2	R_2	S_2
P_1	2,2	x,0	-1,0	0,0
Q_1	0,x	4,4	-1,0	0,0
R_1	0,0	0,0	0,2	0,0
S_1	0,-1	0,-1	-1,-1	2,0

Es gelte $x > 4$. Finde alle Nash Gleichgewichte des Stufenspiels. Für welche Werte von x ist das folgende Strategienpaar ein teilspielperfektes Gleichgewicht: „Spiele (Q_1, Q_2) in der ersten Runde. Falls in der ersten Runde (Q_1, Q_2) gespielt wurde, spiele (P_1, P_2) in der zweiten Runde; falls in der ersten Runde (a, Q_2) mit $a \neq Q_1$ gespielt wurde, spiele (R_1, R_2) in der zweiten Runde; falls in der ersten Runde (Q_1, b) mit $b \neq Q_2$ gespielt wurde, spiele (S_1, S_2) in der zweiten Runde; falls in der ersten Runde (a, b) mit $a \neq Q_1$ und $b \neq Q_2$ gespielt wurde, spiele (P_1, P_2) in der zweiten Runde“?



Rückwärtsinduktion ($I_1 < R$)

$U_2(I_1 < R,\ I_2 = 0) = 0$

$U_2(I_1 < R,\ 0 < I_2 < R - I_1) = -I_2^2 < 0$

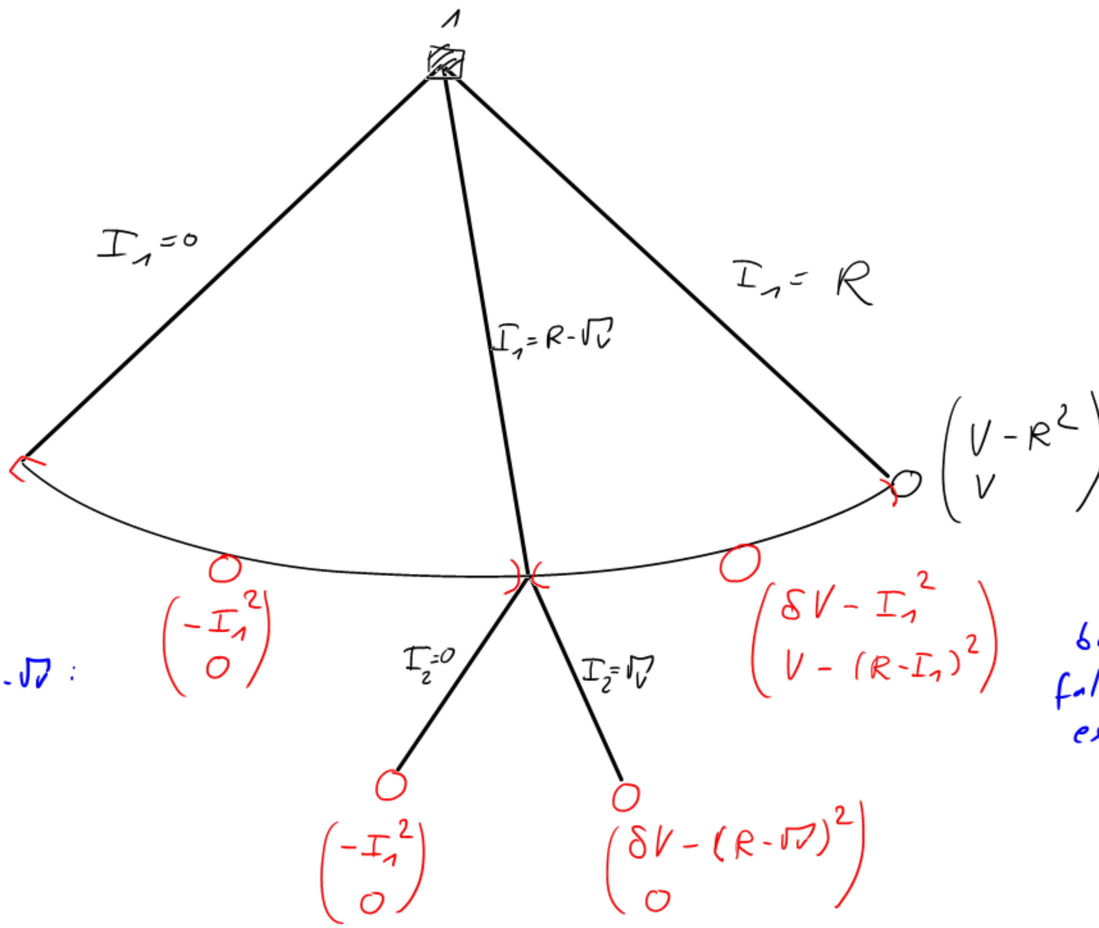
$U_2(I_1 < R,\ I_2 = R - I_1) = V - (R - I_1)^2$

$$0 < V - (R - I_1)^2 \iff (R - I_1)^2 < V \iff R - I_1 < \sqrt{V}$$

$$\iff R - \sqrt{V} < I_1$$

beste Antworten von 2

$$I_2(I_1) = \begin{cases} 0 & \text{falls } I_1 < R - \sqrt{v} \\ \{0, \sqrt{v}\} & \text{falls } I_1 = R - \sqrt{v} \quad \Rightarrow R - I_1 = R - R + \sqrt{v} \\ R - I_1 & \text{falls } I_1 > R - \sqrt{v} \end{cases}$$



beste Antwort falls $0 \leq I_1 < R - \sqrt{v}$:
$I_1 = 0$
$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

beste Antwort falls $R - \sqrt{v} < I_1 < R$ existiert nicht

Falls $I_2(I_1 = R - \sqrt{v}) = \sqrt{v}$:

$$\delta V - (R - \sqrt{v})^2 > 0 \iff \delta V > (R - \sqrt{v})^2 \iff \sqrt{\delta V} > R - \sqrt{v}$$

$$\iff \sqrt{v} + \sqrt{\delta V} > R \iff R < \sqrt{v}(1 + \sqrt{\delta}) \iff I_1 = R - \sqrt{v} \succ_1 I_1 = 0$$

$$\delta V - (R - \sqrt{v})^2 > V - R^2 \iff R^2 - (R - \sqrt{v})^2 > V - \delta V$$

$$\iff \cancel{R^2} - \cancel{R^2} + 2R\sqrt{v} - v > v(1 - \delta) \iff 2R\sqrt{v} > v(2 - \delta)$$

$$\iff R > \frac{1}{2}\sqrt{v}(2 - \delta) = \sqrt{v}\left(1 - \frac{1}{2}\delta\right)$$

$$\Rightarrow I_1^* = R - \sqrt{v}$$

Falls $R > \sqrt{v}\,(1+\sqrt{\delta}) > \sqrt{v}\,(1-\tfrac{1}{2}\delta)$

$\Rightarrow \quad I_1^* = 0$

Falls $R < \sqrt{v}\,(1-\tfrac{1}{2}\delta) \Rightarrow R < \sqrt{v} \Rightarrow I_2 = 0$

Fall 1 $\quad R > \sqrt{v}\,(1+\sqrt{\delta})$

$\Rightarrow \quad I_1^* = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I_2(I_1^*) = 0$

Fall 2 $\quad \sqrt{v}\,(1+\sqrt{\delta}) > R > \sqrt{v}$

$\Rightarrow \quad I_1^* = R - \sqrt{v} \quad \rightsquigarrow \quad I_2(I_1^*) = \sqrt{v}$

Falls $\quad I_2(I_1 = R - \sqrt{v}) = 0$

$\cdots\!\!\to \quad \Rightarrow \quad I_1^* = 0$

---

wenn $\quad R < \sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad I_2(I_1) = R - I_1$

$U_1(I_1 = 0,\ I_2(I_1) = R) = \delta v$

$U_1(I_1 = R,\ I_2(I_1) = 0) = v - R^2$

$\delta v > v - R^2 \iff R^2 > v - \delta v$

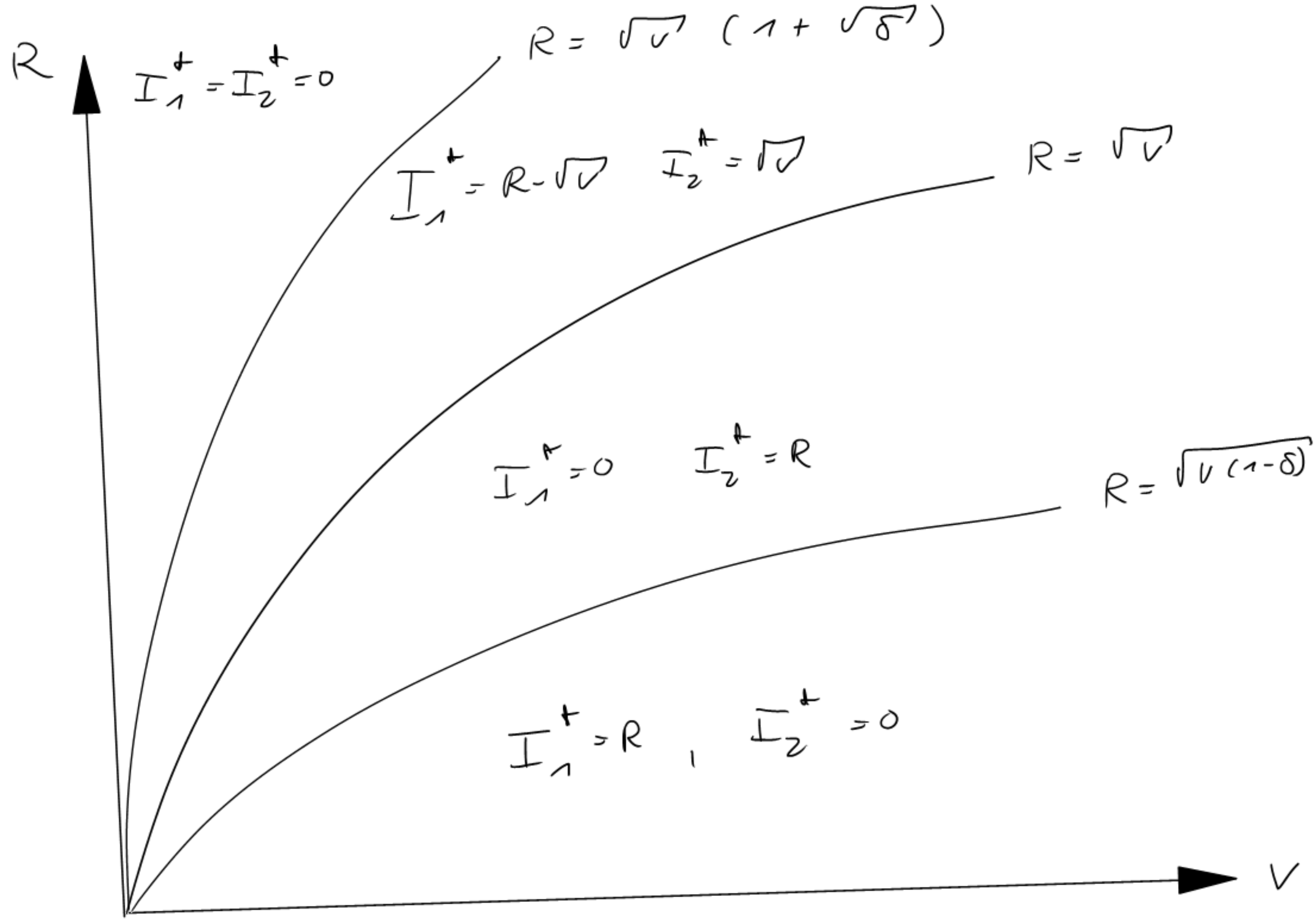
$\iff R > \sqrt{v(1-\delta)}$

Fall 3 $\quad \sqrt{v} > R > \sqrt{v(1-\delta)}$

$I_1^* = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I_2(I_1^*) = R$

Fall 4 $\quad \sqrt{v(1-\delta)} > R$

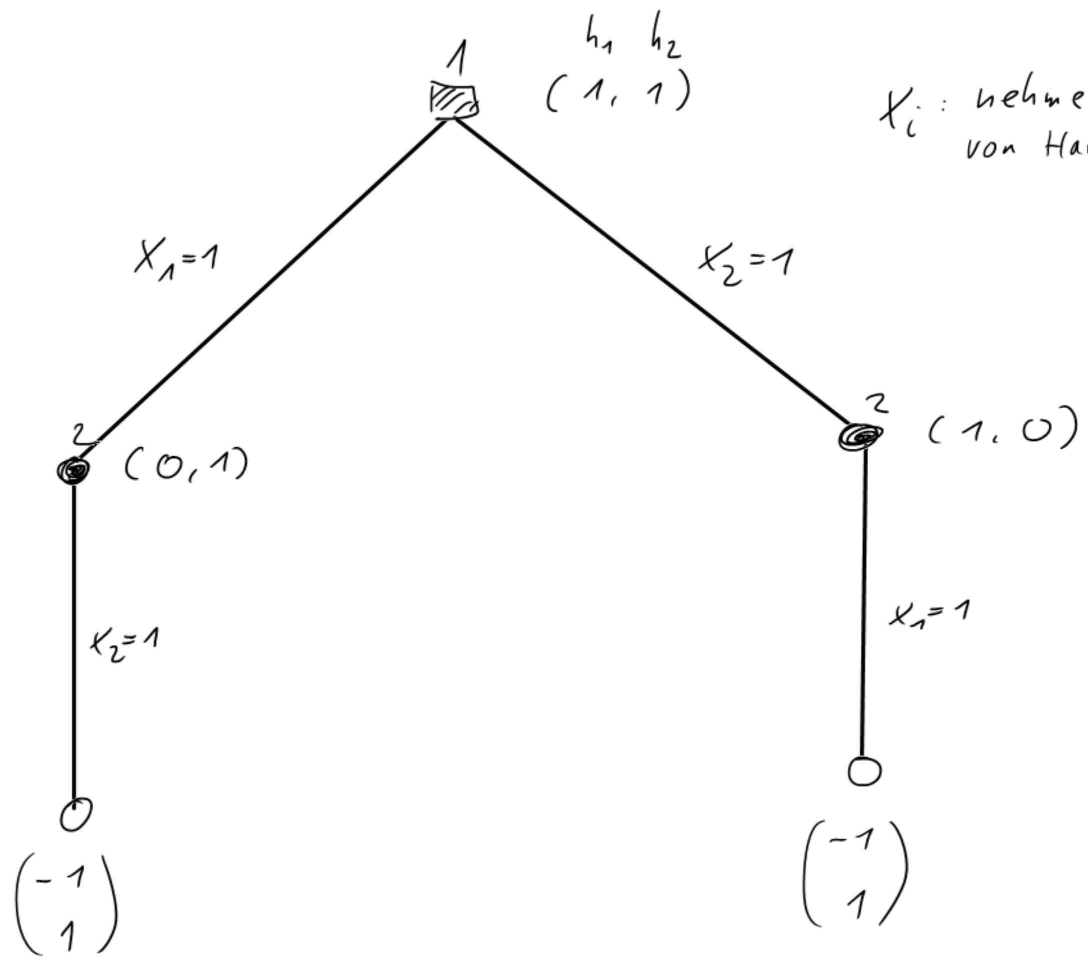
$I_1^* = R \qquad I_2^* = 0$

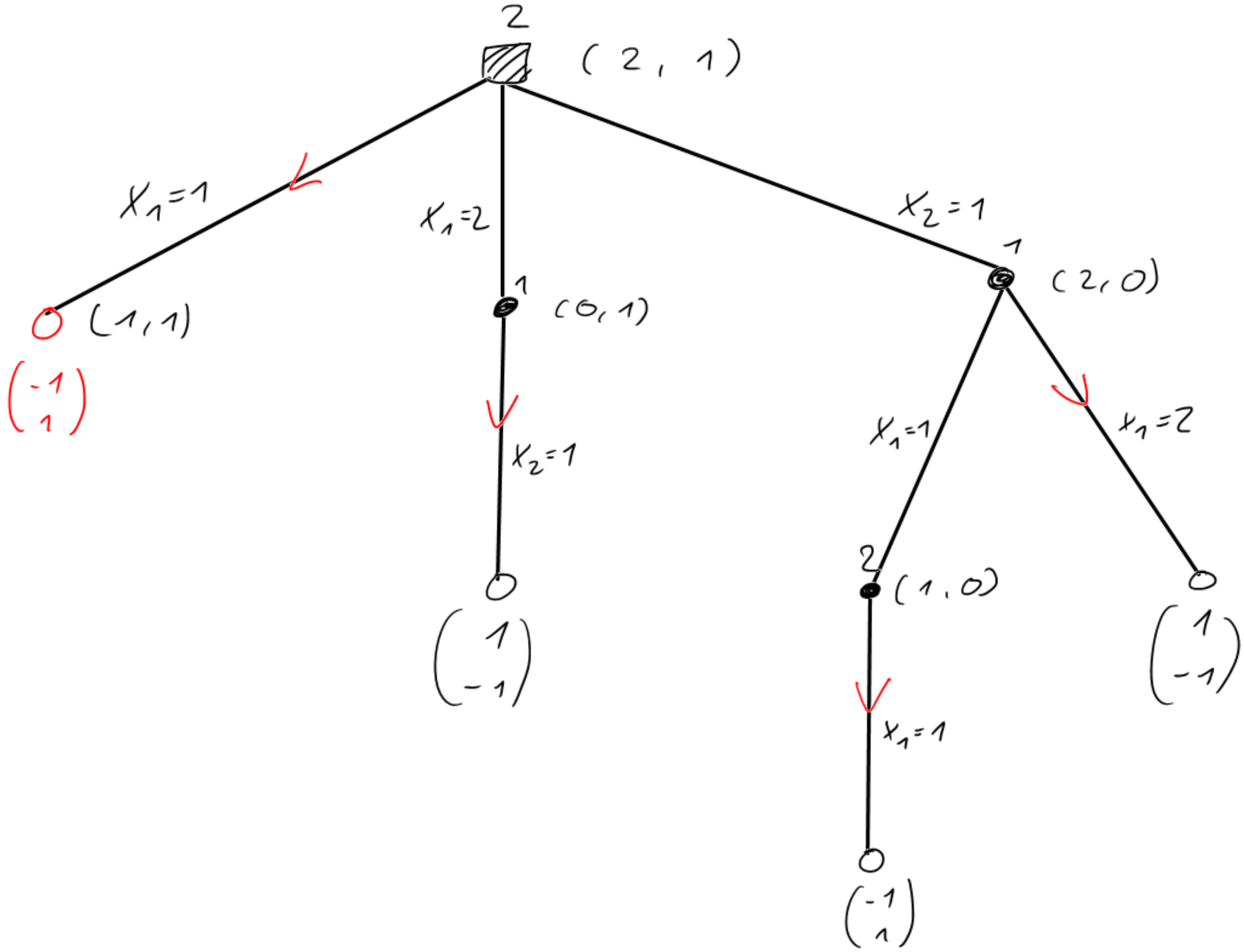


20

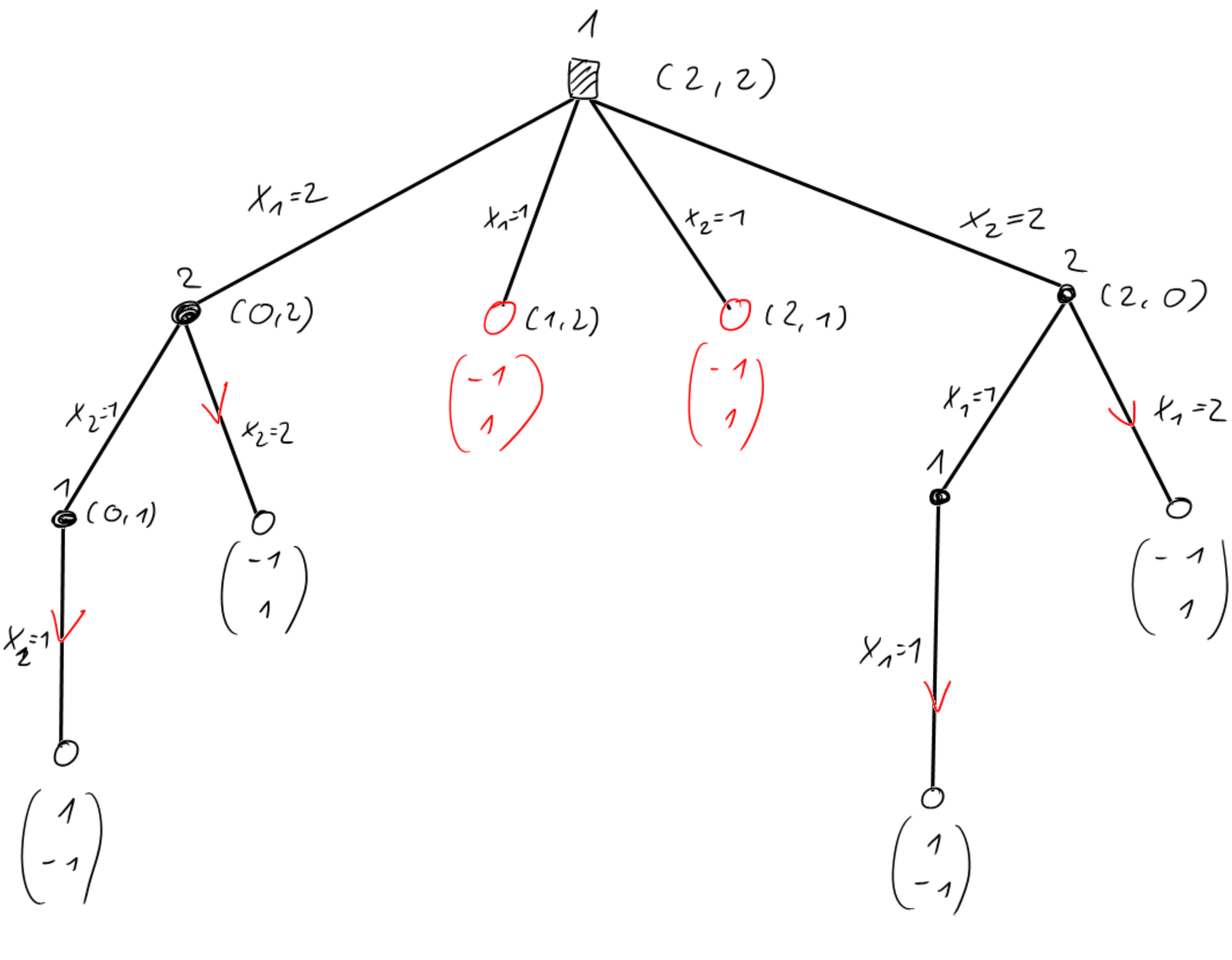
a)

x_i : nehme x_i Hölzchen von Haufen i.





2
(2, 1)
$x_1=1$
$x_1=2$
$x_2=1$
(1, 1)
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
1
(0, 1)
$x_2=1$
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
1
(2, 0)
$x_1=1$
$x_1=2$
2
(1, 0)
$x_1=1$
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$



1
(2, 2)
$x_1=2$
$x_1=1$
$x_2=1$
$x_2=2$
2
(0, 2)
(1, 2)
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
(2, 1)
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
2
(2, 0)
$x_2=1$
$x_2=2$
1
(0, 1)
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
$x_2=1$
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$x_1=1$
$x_1=2$
1
$x_1=1$
$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$(h_1, h_2) = (1, 1)$ 2. Spieler gewinnt

$(h_1, h_2) = (2, 1)$ 1. Spieler gewinnt

$(h_1, h_2) = (2, 2)$ 2. Spieler gewinnt.

b) Falls $h_1 \neq h_2$

und $h_1 = 0$ oder $h_2 = 0$

1. Spieler gewinnt

Falls $h_1 \neq h_2$ und $h_1, h_2 > 0$

$\Rightarrow$ 1. Spieler <u>kann</u> dafür sorgen, dass nach seinem Zug $h_1 = h_2$ gilt.

Falls $h_1 = h_2$ (und $h_1, h_2 > 0$)

$\Rightarrow$ 1. Spieler <u>muss</u> so ziehen, dass $h_1 \neq h_2$ im nächsten Zug gilt.

$$\begin{tikzcd} h_1 \neq h_2 \arrow[rr, bend left, "\text{kann}"] & & h_1 = h_2 \arrow[ll, bend left, "\text{muss}"] \end{tikzcd}$$

Falls ein Spieler bei $h_1 \neq h_2$ dran ist, kann er dafür sorgen, dass er nach endlich vielen Schritten bei $(1, 2)$ oder $(2, 1)$ dran ist und gewinnt das Spiel.

c) drei Haufen h_1, h_2, h_3

	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0

Stelle n_1, n_2, n_3 als Binärzahlen dar

	2^3	2^2	2^1	2^0
3	0	0	1	1
2	0	0	1	0
1	0	0	0	1
Σ	0	0	2	2

Falls alle Ziffern gerade: "balanced"

Falls nicht alle Ziffern gerade: "unbalanced"

$$\begin{tikzcd} \text{"unbalanced"} \arrow[rr, bend left, "\text{kann}"] & & \text{"balanced"} \arrow[ll, bend left, "\text{muss}"] \end{tikzcd}$$

Lösungsstrategie ziehe viele Stöckchen, dass der andere in einem "balanced" Profil ist.

21

2

	P_2	Q_2	R_2	S_2
P_1	2, 2	x, 0	-1, 0	0, 0
Q_1	0, x	4, 4	-1, 0	0, 0
R_1	0, 0	0, 0	0, 2	0, 0
S_1	0, -1	0, -1	-1, -1	2, 0

1

Strategie s_2^* für 2:

$a_2^{I} = Q_2$

$$a_2^{II}(a_1^{I}, a_2^{I}) = \begin{cases} P_2 & \text{falls } (Q_1, Q_2) \\ R_2 & \text{falls } (a, Q_2),\ a \neq Q_1 \\ S_2 & \text{falls } (Q_1, b),\ b \neq Q_2 \\ P_2 & \text{falls } (a, b),\ a \neq Q_1,\ b \neq Q_2 \end{cases}$$

beste Antwort von 1?

$U_1(\overset{I}{Q_1}\overset{II}{P_1}, s_2^*) = 4 + 2 = 6$

$U_1(\overset{I}{P_1}\overset{II}{R_1}, s_2^*) = x + 0 = x$

Damit 1 Q_1 in Stufe I spielt,

muss $x \leq 6$ gelten

Strategie s_1^* von Spieler 1

$a_1^{I} = Q_1$

$$a_1^{II}(a_1^{I}, a_2^{I}) = \begin{cases} P_1 & \text{falls } (Q_1, Q_2) \\ S_1 & \text{falls } (Q_1, b) \quad b \neq Q_2 \\ R_1 & \text{falls } (a, Q_2) \quad a \neq Q_1 \\ P_1 & \text{falls } (a, b) \quad a \neq Q_1 \; b \neq Q_2 \end{cases}$$

$U_2(S_1^*, \overset{I}{Q_2} \overset{II}{P_2}) = 4 + 2 = 6$

$U_2(S_1^*, \overset{I}{P_2} \overset{II}{S_2}) = X + 0 = X$

Falls $X \leq 6$ ist die beste Antwort von 2 auf S_1^* die Strategie S_2^*.