



Blatt





Formen



A.4.1 Sei $M_n = \#\{k_1, \dots, k_n \mid \sum k_i = n\}$.

a) $n=0$: $0+0=0 \Rightarrow M_0=1=0+1$

$n=1$: $1+0=1$
 $0+1=1 \Rightarrow M_1=2=1+1$

$n=2$: $2+0=2$
 $1+1=2$
 $0+2=2 \Rightarrow M_2=3=2+1$

Verm. $M_n = n+1$

Bew. schnelle Lösung: Teile n

Kugeln in $k_1=k$ & $k_2=n-k$ Teile:

$\underbrace{000}_{k} \underbrace{100}_{n-k}$ & seth 1 als schwarze Kugel!

$\underbrace{000 \bullet 00}_{k \quad n-k}$

$n+1$ Kugeln

Dann ist $M_n = \# \text{Möglichkeiten, } \bullet \text{ zu positionieren}$

$= n+1$

Langsame Lösung:

(A) s.o.

(B) $k_2=0$ tritt nur 1x auf. Sei $k_2 \neq 0$

$\Rightarrow k_2 \geq 1$. Schreibe

$k_1 + k_2 = n+1$



Langsame Lösung:

(A) s.o.

(S) $k_2 = 0$ trifft nur 1x auf. Sei $k_2 \neq 0$

$\Rightarrow k_2 \geq 1$. Schreibe

$$k_1 + k_2 = n + 1$$

$$\Leftrightarrow k_1 + \underbrace{(k_2 - 1)}_{\tilde{k}_2} = n$$

$$\Rightarrow \tilde{k}_2 \in \mathbb{N}$$

Nach IV: $\#\{k_1, \tilde{k}_2 : k_1 + \tilde{k}_2 = n\} = n + 1$.

Nimm $k_2 = 0$ dazu, dann gibt es noch genau 1 weitere Möglichkeit ($k_1 = n, k_2 = 0$)

$$\Rightarrow M_{n+1} = n + 2 \quad \square$$

b) offensichtlich $k_i \leq n \quad \forall i$. Schreibe

$$k_1 + k_2 + k_3 = n$$

$$\Leftrightarrow k_2 + k_3 = n - k_1 =: \tilde{n} \in \mathbb{N}$$

Dann gibt nach a)

$$\#\{k_2, k_3 : k_2 + k_3 = \tilde{n}\} = \tilde{n} + 1 = n - k_1 + 1.$$

Zudem ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Kugeln in 2 Gruppen aufzuteilen, $n + 1$.



b) offensichtlich $k_i \leq n$ für alle i . Schreibe
 $k_1 + k_2 + k_3 = n$

$$\Leftrightarrow k_2 + k_3 = n - k_1 =: \tilde{n} \in \mathbb{N}$$

Dann gilt nach a)

$$\#\{k_2, k_3 : k_2 + k_3 = \tilde{n}\} = \tilde{n} + 1 = n - k_1 + 1.$$

Zudem ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Kugeln in 2 Gruppen aufzuteilen, gegeben durch

$$\sum_{k=0}^n (n-k)$$

(leere Gruppen sind mitzuzählen, vgl. Argument in a) wenn man die schwarze Kugel ganz nach links/rechts schiebt)

Insgesamt gilt dann

$$M_n = \sum_{k_1=0}^n (n - k_1 + 1)$$

$$= (n+1) \sum_{k_1=0}^n 1 - \sum_{k_1=0}^n k_1$$

$$= (n+1)^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Blatt

2

Analysis I: Blatt 2 Musterlösung

Aufgabe 3: (b) Fortsetzung

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben.

Setze $k := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$, dann gilt $\frac{1}{k} < \varepsilon$.

Wähle nun $N := 10^k$, nach obiger Überlegung gilt:

$$|b_n - 0| = |b_n| \stackrel{n \geq 0}{=} b_n \leq b_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

Aufgabe 4: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$

$$\text{und } b_n := \frac{1}{n+1} (a_0 + \dots + a_n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\text{z.z.: } b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N \quad (\text{möglich wg. Konvergenz})$$

Setze nun $M := \lceil \max \{ N, \frac{2 \sum_{k=0}^N |a_k - a|}{\varepsilon} \} \rceil + 1$,
dann gilt für alle $n \geq M$:

$$|b_n - a| = \left| \frac{1}{n+1} (a_0 + \dots + a_n) - a \right| = \frac{1}{n+1} |(a_0 + \dots + a_n) - (n+1)a|$$

$$= \frac{1}{n+1} |(a_0 - a) + \dots + (a_n - a)|$$

Dreiecks-

ungleichung $\Rightarrow$

$$\leq \frac{1}{n+1} (|a_0 - a| + \dots + |a_n - a|) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k - a|$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N |a_k - a| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n |a_k - a|$$

Voraussetzung
oben $\Rightarrow$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N |a_k - a| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^n \varepsilon/2$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N |a_k - a| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{(n - (N+1) + 1)}{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^N |a_k - a| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\textcircled{*} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \text{Konvergenz gegen } a$$

zu $\textcircled{*}$: Nach Wahl von N gilt:

$$n \geq N \Rightarrow \frac{2 \sum_{k=1}^N |a_k - a|}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |a_k - a| > \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^N |a_k - a| \quad \square$$

(b) Betrachte die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$, diese ist divergent nach Vorlesung.

Für b_n gilt dann:

$$b_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$.

Wir zeigen zunächst für N gerade

$$b_N \geq b_n \quad \forall n \geq N$$

Für n ungerade ist klar, dass die Aussage gilt, da

$$b_N \geq 0 = b_n$$

$$\text{für } n \text{ gerade gilt: } b_N = \frac{1}{N+1} \geq \frac{1}{n+1} = b_n$$

$$\Leftrightarrow n \geq N \quad \checkmark$$

Wähle nun $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil + 1$ oder $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil + 2$, je nachdem welche dieser Zahlen gerade ist, dann gilt $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

$$\text{Es folgt für } n \geq N: \overset{\text{s.o.}}{b_n} \leq b_N = \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

und somit $|b_n - 0| = b_n < \varepsilon \Rightarrow \text{Konvergenz}$