

Analysis II

Kurzskript — Definitionen und Sätze

TU Dortmund, Sommersemester 2014

Ben Schweizer

Version vom 16.7.2014

Inhaltsverzeichnis

1	Topologische Begriffe	3
1.1	Norm, Metrik, Topologie	3
1.2	Stetigkeit	5
1.3	Vollständigkeit und Kompaktheit	6
2	Differentiation	8
2.1	Partielle und totale Ableitung	8
2.2	Kurven und Felder	9
2.3	Kettenregel, Mittelwertsatz, Taylor-Formel	10
3	Implizite Funktionen	14
3.1	Der Satz über implizite Funktionen	14
3.2	Umkehrfunktionen	15
3.3	Untermannigfaltigkeiten	15
4	Integrale	17
4.1	Kurvenintegrale	17
4.2	Parameterabhängige Integrale	17
5	Gewöhnliche Differentialgleichungen	19
5.1	Erste Beispiele	19
5.2	Der Existenz- und Eindeigkeitssatz	20
5.3	Lineare Differentialgleichungen	22

1 Topologische Begriffe

1.1 Norm, Metrik, Topologie

Definition 1.1 (Norm) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Eine Norm ist eine Abbildung, die folgende Eigenschaften erfüllt:

$$(N1) \quad \|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Vektorraum**.

Definition 1.2 (Metrik) Sei X eine Menge. Eine Metrik ist eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften

$$(M1) \quad d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ für alle } x, y \in X$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ für alle } x, y, z \in X.$$

Das Paar (X, d) heißt **metrischer Raum**.

Satz 1.3 (Norm liefert Metrik) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann definiert

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf V .

Definition 1.4 (Kugeln) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zu $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$ setze

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

Die Menge $B_r(x) \subset X$ heißt die offene Kugel um x mit Radius r .

Definition 1.5 (Umgebung) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $U \subset X$ und $x \in X$. Die Menge U heißt Umgebung von x , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Definition 1.6 (offen) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, falls U Umgebung von x ist für alle $x \in U$.

Satz 1.7 (Rechenregeln für offene Mengen) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. \emptyset und X sind offen
2. U, V offen $\rightarrow U \cap V$ offen
3. U_i offen für alle $i \in I$ (beliebige Indexmenge) $\rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Definition 1.8 (abgeschlossen) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

Definition 1.9 (Rand) Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$.

$$x \in \partial A : \iff \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A).$$

Satz 1.10 Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist

1. $X \setminus \partial A$ offen und ∂A abgeschlossen
2. $A \cup \partial A$ abgeschlossen
3. $A \setminus \partial A$ offen.

Definition 1.11 (Inneres/Abschluss) Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

- $\overset{\circ}{A} := A \setminus \partial A$ das Innere von A
- $\bar{A} := A \cup \partial A$ der Abschluss von A .

Definition 1.12 (Topologie) Sei X eine Menge mit einer ausgezeichneten Menge von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ (eine Teilmenge der Potenzmenge von X). Die Familie \mathcal{T} heißt Topologie auf X , falls

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $U, V \in \mathcal{T} \rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
3. $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I \rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Eine Menge X mit Topologie \mathcal{T} heißt topologischer Raum. Die Elemente von \mathcal{T} heißen offene Mengen. $U \subset X$ heißt Umgebung von x , falls es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$.

1.2 Stetigkeit

Definition 1.13 (Konvergenz einer Folge) Sei X ein topologischer Raum, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , $x \in X$.

$$x_k \rightarrow x \text{ in } X \iff \forall \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ existiert ein } K \in \mathbb{N} : x_k \in U \forall k \geq K.$$

Satz 1.14 (Charakterisierung abgeschlossener Mengen) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

1. A abgeschlossen $\rightarrow \forall x_k \rightarrow x, x_k \in A$ für alle k gilt $x \in A$
2. Sei X ein metrischer Raum und für alle Folgen $x_k \rightarrow x$ mit $x_k \in A$ für alle k gilt $x \in A$. Dann ist A abgeschlossen.

Definition 1.15 (Stetigkeit in metrischen Räumen) Seien X, Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ und $a \in X$.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } a & \iff \text{für alle Folgen } x_k \rightarrow a \text{ gilt } f(x_k) \rightarrow f(a) \\ & \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \end{aligned}$$

f heißt stetig auf X , wenn f stetig in x ist für alle $x \in X$.

Satz 1.16 (Viele stetige Abbildungen) Seien X, Y, Z metrische Räume.

1. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.
2. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\text{Dann ist } f = (f_1, \dots, f_n) \text{ stetig} \iff f_k \text{ sind stetig für alle } k.$$

3. Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so ist auch $f \pm g$ stetig.
Für $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind auch $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\frac{f}{g} : X \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.

Satz 1.17 (ε - δ -Kriterium der Stetigkeit) Seien X, Y metrische Räume, $a \in X$ und $f : X \rightarrow Y$.

$$f \text{ stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so dass } d_Y(f(x), f(a)) \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in B_\delta(a).$$

Satz 1.18 Seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Dann gilt

$$f \text{ ist stetig} \iff \forall V \subset Y \text{ offen ist } f^{-1}(V) \text{ offen.}$$

Definition 1.19 (Stetigkeit) Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Die Abbildung f heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen offen sind.

Definition 1.20 (Homöomorphismus) Seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv und stetig ist, und f^{-1} stetig ist.

Satz 1.21 (Lineare stetige Abbildungen) Seien X, Y normierte Vektorräume und $A : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist stetig
2. A ist stetig in 0
3. es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|A \cdot x\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Definition 1.22 (Abbildungsnorm) Seien X, Y Vektorräume. Für eine stetige Abbildung $A : X \rightarrow Y$ setzen wir

$$\|A\| := \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup \{ \|Ax\|_Y \mid x \in X, \|x\| \leq 1 \}.$$

1.3 Vollständigkeit und Kompaktheit

Definition 1.23 (Cauchy-Folge) Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls

für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_k, x_m) < \varepsilon$ für alle $k, m \geq K$.

Definition 1.24 (Vollständiger Raum) Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Satz 1.25 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

Definition 1.26 (Banachraum) Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

Definition 1.27 (Überdeckung/Kompaktheit) Sei X metrischer Raum, $A \subset X$.

1. Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ mit einer Indexmenge I heißt **Überdeckung** von A , falls

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

also für alle $x \in A$ existiert ein $i \in I$, so dass $x \in U_i$.

$(U_i)_{i \in I}$ heißt **offene Überdeckung**, falls alle U_i offen sind.

2. Die Menge A heißt **kompakt**, falls zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine **endliche** Teil-Überdeckung existiert, also $i_1, \dots, i_N \in I$ existieren, so dass

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N}.$$

Definition 1.28 (Diameter/Beschränktheit) Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Der Durchmesser oder **Diameter** von A wird definiert als

$$\text{diam} A := \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

und $\text{diam} \emptyset := 0$. Die Menge A heißt **beschränkt**, falls $\text{diam} A < \infty$.

Satz 1.29 (kompakt \Rightarrow beschränkt und abgeschlossen) Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Dann ist A beschränkt und abgeschlossen.

Lemma 1.30 (\mathbb{R}^n hat abzählbare Basis der Topologie) Der Raum $X = \mathbb{R}^n$ hat eine abzählbare Basis der Topologie: es existiert eine Familie $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Mengen, so dass für alle $U \subset X$ offen und alle $x \in U$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_i \subset U$.

Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt daher auch

A kompakt \iff jede abzählbare Vereinigung offener Mengen hat eine endliche Teil-Überdeckung.

Definition 1.31 (Folgenkompaktheit) Ein topologischer Raum heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 1.32 (Folgenkompaktheit und Kompaktheit) Sei X ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, zum Beispiel $X = \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $A \subset X$

A folgenkompakt \iff A kompakt.

Satz 1.33 (Heine-Borel) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist

A kompakt \iff A abgeschlossen und beschränkt.

Bemerkung Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann:

A kompakt $\xrightarrow{1.)}$ A folgenkompakt $\xrightarrow{2.)}$ A vollständig $\xrightarrow{3.)}$ A abgeschlossen.

Beispiele, die zeigen, dass jeweils \Leftarrow nicht gilt:

- 1.) X ein topologischer Raum ohne abzählbare Basis, z.B. $L^\infty([0, 1], \mathbb{R})$
- 2.) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ oder, wenn A beschränkt sein soll: $A := \overline{B}_1(0) \subset C_b([0, 1])$
- 3.) \mathbb{Q} in $X = \mathbb{Q}$

Satz 1.34 (Bilder kompakter Mengen) Seien X, Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.

Satz 1.35 (Stetige Abbildungen auf Kompakta: Maximum) Sei X ein kompakter topologischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es existiert ein $x_0 \in X$, so dass

$$f(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Satz 1.36 (Stetige Abbildungen auf Kompakta: Gleichmäßige Stetigkeit) Seien X, Y metrische Räume, X kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X : \quad d_X(x, y) < \delta \rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

2 Differentiation

2.1 Partielle und totale Ableitung

Definition 2.1 (Ableitung) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $x \in U$ ein Punkt. Die Abbildung f heißt differenzierbar in $x \in U$, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x + \xi) = f(x) + A \cdot \xi + \varphi(\xi)$$

mit

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

In diesem Fall heißt $Df(x) := A$ die (totale) Ableitung von f in x . Die Abbildung f heißt differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist in jedem Punkt $x \in U$.

Bemerkung 2.2 (Kurven) Im Fall $n = 1$ ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar genau dann, wenn alle Komponenten f_j , $1 \leq j \leq m$, differenzierbar sind (im Sinne der Analysis I). In diesem Fall gilt

$$Df(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix}$$

in dem Sinne, dass $Df(x) : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto (f'_1(x)\xi, \dots, f'_m(x)\xi) \in \mathbb{R}^m$.

Definition 2.3 (Partielle Ableitung) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Sei $x \in U$ ein Punkt und $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n . Dann schreiben wir

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ 0 \neq h \in \mathbb{R}}} \frac{f_j(x + h \cdot e_i) - f_j(x)}{h},$$

falls dieser Limes existiert. Existiert der Limes für alle $j \leq m$, so nennen wir f partiell differenzierbar (nach x_i).

Notation: Abkürzend schreiben wir die partiellen Ableitungen auch als

$$\partial_i f_j(x) := \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Im Falle $n = 1$, $f : x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$ (f hat nur ein Argument), schreiben wir auch $\partial_x f(x) := \partial_1 f(x)$.

Satz 2.4 (Totale Ableitung \rightarrow Partielle Ableitungen) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x . Dann ist f stetig in x .

Die totale Ableitung $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei bezüglich der kanonischen Basen dargestellt durch die Matrix $A = Df(x)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Dann existieren alle partiellen Ableitungen von f im Punkt x und es gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = a_{j,i}.$$

Die Matrix A nennt man auch **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix**.

Satz 2.5 (Partielle Ableitungen \rightarrow Totale Ableitung) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in U und alle partiellen Ableitungen seien stetig in $x \in U$. Dann ist f in x differenzierbar mit

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Corollar 2.6 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, für die alle partiellen Ableitungen stetig sind (insbesondere existieren sie). Dann ist f stetig.

Merke:

stetig partiell differenzierbar \rightarrow differenzierbar \rightarrow partiell differenzierbar.

2.2 Kurven und Felder

Definition 2.7 (Kurve) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$. Der Vektor

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = Df(t)$$

heißt **Tangentialvektor** von f in t (falls f in t differenzierbar ist). Die Zahl

$$\mathcal{L}(f) := \int_I \|f'(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt$$

heißt **Länge** von f (falls das Integral existiert).

Definition 2.8 (Skalarfeld) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein skalares Feld ist eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Falls f in x differenzierbar ist, ist der **Gradient** gegeben durch

$$\nabla f(x) = Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (x).$$

Insbesondere ist

$$f(x + \xi) \approx f(x) + \nabla f(x) \cdot \xi.$$

Kommentar für spätere Vorlesungen: Eigentlich ist $Df(x)$ eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, also eine Matrix, die nur aus einer Zeile besteht. Hingegen ist der Gradient $\nabla f(x)$ ein Vektor im \mathbb{R}^n . Dieser Vektor hat die Eigenschaft, dass das Skalarprodukt mit einer Richtung ξ die Variation von f beschreibt. Es gilt also $\nabla f(x) \cdot \xi = Df(x) \xi$.

Definition 2.9 (Vektorfeld/Divergenz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld ist eine Abbildung $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Falls v differenzierbar ist, so heißt

$$\operatorname{div} v := \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

die Divergenz von v .

Satz 2.10 (Schwarz) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x).$$

Definition 2.11 (Rotation) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Die Rotation von v ist definiert als

$$\operatorname{rot} v(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} (x).$$

Definition 2.12 (Laplace-Operator) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta f := \operatorname{div} (\nabla f) = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f).$$

2.3 Kettenregel, Mittelwertsatz, Taylor-Formel

Definition 2.13 (Landau-Symbol) Falls $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ die Eigenschaft $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \rightarrow 0$ für $\|\xi\| \rightarrow 0$ hat, so schreiben wir auch $\varphi(\xi) = \mathbf{o}(\|\xi\|)$. In Worten: Für $\xi \rightarrow 0$ geht φ schneller gegen 0 als $\|\xi\|$.

Satz 2.14 (Kettenregel) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Seien weiter $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(U) \subset V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Funktionen. Für $x \in U$ sei f in x und g in $f(x)$ differenzierbar. Dann ist die Komposition*

$$g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

differenzierbar in x und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

Corollar 2.15 (Partielle Ableitungen) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. Seien weiter $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(U) \subset V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Funktionen. Dann gilt*

$$\partial_i (g \circ f)_k(x) = D(g_k \circ f)(x) \cdot e_i = e_k \cdot Dg(f(x)) \cdot Df(x) \cdot e_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Definition 2.16 (Richtungsableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn*

$$D_\xi f(x) := \partial_\xi f(x) := \left. \frac{d}{dt} f(x + \xi t) \right|_{t=0}$$

existiert, so nennen wir $D_\xi f(x)$ die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung ξ . Ist f darüberhinaus in x differenzierbar, so folgt aus der Kettenregel

$$D_\xi f(x) = Df(x) \cdot \xi = \nabla f(x) \cdot \xi.$$

Satz 2.17 (Mittelwertsatz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Seien weiter $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$f(x + \xi) = f(x) + \left(\int_0^1 Df(x + t\xi) dt \right) \cdot \xi$$

Corollar 2.18 (Differenzierbare Funktionen sind Lipschitz-stetig) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Seien weiter $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Setze*

$$M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t\xi)\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}.$$

Dann gilt

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

Lemma 2.19 *Sei $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt.$$

Notation: Sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein **Multiindex**. Wir setzen

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^n |\alpha_j| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$$

$$\alpha! := \prod_{j=1}^n \alpha_j! = (\alpha_1!) \cdot \dots \cdot (\alpha_n!)$$

Weiterhin sei

$$D^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist also $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

Satz 2.20 (Höhere Ableitungen) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit stetigen k -ten Ableitungen. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot \xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := f(x + t\xi)$$

k -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + t\xi) \cdot \xi^\alpha.$$

Satz 2.21 (Taylor-Formel) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t \cdot \xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann existiert ein $\theta \in [0, 1]$ so dass

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(x) \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(x + \theta\xi) \cdot \xi^\alpha.$$

Corollar 2.22 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(k+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k+1} \frac{D^\alpha f}{\alpha!}(x) \cdot \xi^\alpha + \mathbf{o}(\|\xi\|^{k+1})$$

für $\xi \rightarrow 0$.

Definition 2.23 (Hesse-Matrix) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in $x \in U$. Dann ist die Hesse-Matrix von f definiert als

$$\text{Hess}(f)(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1,\dots,n}.$$

Corollar 2.24 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in $x \in U$. Dann gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \text{Hess}(f)(x) \cdot \xi \rangle + \mathbf{o}(\|\xi\|^2)$$

für $\xi \rightarrow 0$.

Definition 2.25 (Lokales Extremum) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in U$ heißt lokales Extremum von f , falls für ein $\delta > 0$

$$f(y) \leq f(x) \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad (x \text{ ist lokales Maximum})$$

oder

$$f(y) \geq f(x) \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad (x \text{ ist lokales Minimum}).$$

Satz 2.26 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei weiter $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $x \in U$ und x ein lokales Extremum von f . Dann gilt

$$\nabla f(x) = 0.$$

Definition 2.27 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir fassen A hier nicht als Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf, sondern als Bilinearform, $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $A : (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, A \cdot \eta \rangle$. Die Matrix A heißt

- **positiv definit**, falls $\langle \xi, A \cdot \xi \rangle > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt
- **positiv semidefinit**, falls $\langle \xi, A \cdot \xi \rangle \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt
- **negativ (semi-)definit**, falls $(-A)$ positiv (semi-)definit ist
- **indefinit**, falls $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass

$$\langle \xi, A \cdot \xi \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle \eta, A \cdot \eta \rangle < 0.$$

Bemerkung: Eine symmetrische quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit falls alle Eigenwerte von A positiv sind. Eine symmetrische quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv semidefinit falls alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.

Satz 2.28 (Hinreichendes Kriterium für Extrema) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\nabla f(x) = 0$ für $x \in U$. Weiterhin sei $\text{Hess}(f)(x)$ positiv definit. Dann besitzt f in x ein striktes lokales Minimum: es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(y) > f(x) \quad \forall y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}.$$

3 Implizite Funktionen

3.1 Der Satz über implizite Funktionen

Satz 3.1 (Banach'scher Fixpunktsatz) Sei X ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $T : A \rightarrow A$ eine Kontraktion, das heißt es existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta \cdot d(x, y).$$

Dann besitzt T genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $x \in A$ mit

$$T(x) = x.$$

Satz 3.2 (Inverse von Matrizen) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $B \in B_\delta(A)$ auch B invertierbar ist mit

$$\|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|.$$

Satz 3.3 (Implizite Funktionen) Sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^m$. Sei weiter $U \subset X \times Y$ und $(x_0, y_0) \in U$. Betrachte für $f : U \rightarrow Z$ die Gleichung

$$f(x, y) = 0. \tag{*}$$

Es gelte

(i) Triviale Lösung $f(x_0, y_0) = 0$,

(ii) Regularität $D_y f$ existiert, f und $D_y f$ sind stetig in (x_0, y_0)

(iii) Invertierbarkeit $D_y f(x_0, y_0) : Y \rightarrow Z$ ist invertierbar.

Dann kann man (*) lokal nach y auflösen: Es existieren $\delta_x > 0$, $\delta_y > 0$ und eine eindeutige Abbildung

$$u : B_{\delta_x}(x_0) \rightarrow Y$$

mit

$$f(x, y) = 0, x \in B_{\delta_x}(x_0), y \in B_{\delta_y}(y_0) \iff y = u(x).$$

Die Abbildung u ist stetig. Ist $f \in C^1$, so ist auch $u \in C^1$ und es gilt

$$D_x u(x) = -[D_y f(x, u(x))]^{-1} \cdot D_x f(x, u(x)).$$

3.2 Umkehrfunktionen

Satz 3.4 (Umkehrabbildung) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $x_0 \in U$ ein Punkt und $y_0 := f(x_0)$ sein Bildpunkt. Die Linearisierung $Df(x_0)$ sei invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen $U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ von y_0 , so dass $f : U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv ist. Die Umkehrabbildung g von f (also die Abbildung g mit $g \circ f = \text{id}|_{U_0}$) ist stetig differenzierbar mit $Dg(y_0) = (Df(x_0))^{-1}$.

Satz 3.5 (Invertieren von Matrizen) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass die Abbildung

$$\text{inv} : \mathbb{R}^{n \times n} \supset B_\delta(A) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \mapsto B^{-1}$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar ist.

Satz 3.6 (Regularität der Umkehrfunktion) Es sei $f : U \rightarrow V$ eine Funktion zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , $Df(x)$ sei invertierbar für alle $x \in U$, f sei bijektiv mit Umkehrfunktion $g : V \rightarrow U$. Ist f von der Klasse $f \in C^k$ für $k \geq 1$, so ist auch g von der Klasse $g \in C^k$.

Definition 3.7 (Homöomorphismus) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow V$ bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \rightarrow U$. Falls f und g stetig sind, so heißt f ein **Homöomorphismus**.

Sind die Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, f ein Homöomorphismus und f und g beide stetig differenzierbar, so heißt f ein **Diffeomorphismus**.

3.3 Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.8 (Immersion) Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t_1, \dots, t_k) \mapsto \varphi(t_1, \dots, t_k)$. Die Abbildung φ heißt **Immersion**, wenn φ stetig differenzierbar ist und der Rang der Funktionalmatrix

$$D\varphi = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$$

in jedem Punkt maximal ist, also $\text{Rang}(D\varphi(t)) = k$ für alle $t \in T$.

Satz 3.9 (Immersionen sind lokal Homöomorphismen) Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem Punkt $t \in T$ eine offene Umgebung $V \subset T$, so dass die Einschränkung $\varphi|_V : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv ist und ein Homöomorphismus von V auf $\varphi(V)$.

Definition 3.10 (Untermannigfaltigkeit) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k-dimensionale Untermannigfaltigkeit**, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, $T \subset \mathbb{R}^k$ offen und eine Immersion $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi : T \rightarrow M \cap U$ ein Homöomorphismus ist.

Satz 3.11 (Untermannigfaltigkeiten als Lösungsflächen) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt: M ist genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für alle $a \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar mit $\text{Rang } Df(x) = n - k \ \forall x \in U$, so dass

$$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

Definition 3.12 (Tangential- und Normalenvektoren) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $\tau \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M in a , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert und eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = \tau$. Der **Tangentialraum** von M in a ist die Menge

$$T_a(M) := \{\tau \in \mathbb{R}^n \mid \tau \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}.$$

Elemente $n \in \mathbb{R}^n$ der Menge

$$N_a(M) := \{n \in \mathbb{R}^n \mid n \cdot \tau = 0 \ \forall \tau \in T_a(M)\}$$

heißen **Normalenvektor**.

Satz 3.13 (Charakterisierung von Tangential- und Normalenraum) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann gilt:

- (i) $T_a(M)$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum. Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : V \rightarrow M$ eine Immersion wie in Definition 3.10 mit $\varphi(t) = a$. Dann ist $\{\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)\}$ eine Basis von $T_a(M)$.
- (ii) $N_a(M)$ ist ein $(n - k)$ -dimensionaler Vektorraum. Zu a sei $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$ eine Nullstellenfunktion wie in Satz 3.11. Dann ist $\{\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$.

Satz 3.14 (Extrema unter Nebenbedingungen) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. In der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei M gegeben als $M \cap U = \{g = 0\}$ für eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit $\text{Rang } Dg(x) = n - k$ für alle $x \in U$.

Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, die in a ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung M besitzt. Genauer: es existiert eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a , so dass $F(a) \geq F(x)$ für alle $x \in M \cap V$ gilt.

Dann gilt

$$\nabla F(a) \in N_a(M).$$

Aufgrund von Satz 3.13 gibt es daher Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla F(a) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \nabla g_j(a).$$

Die λ_j heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

4 Integrale

4.1 Kurvenintegrale

Definition 4.1 (Länge einer Kurve) Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve auf $I = (a, b)$. Dann definieren wir die Länge der Kurve als

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Lemma 4.2 (Umparametrisierung) Sei $\Phi : (0, L) \rightarrow (a, b)$ stetig diffbar, bijektiv und monoton wachsend. Dann ist durch $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \Phi$ eine Umparametrisierung von γ gegeben. Die Länge bleibt unverändert, es gilt $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\tilde{\gamma})$.

Definition 4.3 (Integral von f über eine Kurve γ) Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein skalares Feld und $\gamma(I) \subset U$. Dann setzen wir

$$\int_{\gamma} f := \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Der Wert von $\int_{\gamma} f$ ist unabhängig von der Parametrisierung von γ .

4.2 Parameterabhängige Integrale

Satz 4.4 (Stetige Abhängigkeit) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Menge. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ setze

$$\psi(y) := \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in U.$$

Dann ist $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Satz 4.5 (Differenzierbare Abhängigkeit) Seien $[a, b]$ und $J \subset \mathbb{R}$ zwei kompakte Intervalle, $f : [a, b] \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ sei stetig und nach y stetig differenzierbar. Wir betrachten

$$\psi(y) := \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in J.$$

Dann ist $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Satz 4.6 (Doppelintegrale) Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

5.1 Erste Beispiele

Definition 5.1 (Gewöhnliche Differentialgleichung) Eine (autonome) gewöhnliche Differentialgleichung ist gegeben durch einen Wertebereich $U \subset \mathbb{R}^n$, ein Zeitintervall $[0, T) \subset \mathbb{R}$, eine Anfangsbedingung $y_0 \in U$ und eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$y : [0, T) \rightarrow U \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0, \quad \text{und} \quad y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in [0, T).$$

Eine (nicht-autonome) gewöhnliche Differentialgleichung ist gegeben durch $U \subset \mathbb{R}^n$, $[0, T) \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in U$ wie oben, und eine rechte Seite $f : U \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für Lösungen fordern wir $y'(t) = f(y(t), t)$ für alle $t \in [0, T)$.

Bemerkung: Durch Einführung einer zusätzlichen Zeitvariablen $x(t) = t$ kann man jedes explizit zeitabhängige (also nicht-autonome) System äquivalent als ein autonomes System schreiben: Für $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist das System $y'(t) = f(y(t), t)$ äquivalent zum System $(y, x)' = \tilde{f}((y, x)) := (f(y, x), 1)$.

Satz 5.2 (Eindimensionale lineare Differentialgleichung) Zu einer stetigen Funktion $a : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetig differenzierbare Lösung $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(\eta) \, d\eta \right).$$

Satz 5.3 (Variation der Konstanten) Zu stetigen Funktionen $a, b : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetig differenzierbare Lösung $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = z(t) \left(y_0 + \int_{t_0}^t \frac{b(\eta)}{z(\eta)} d\eta \right)$$

mit

$$z(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a(\eta) d\eta \right).$$

Hierbei ist die (positive) Funktion z die Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} z'(t) &= a(t)z(t) \\ z(t_0) &= 1. \end{aligned}$$

Satz 5.4 (Explizites Lösen von Differentialgleichungen) Um eine explizite Lösung einer eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichung zu finden, kann man versuchen:

- Substituieren
- Trennung der Variablen
- Intelligentes Raten
- Im BRONSTEIN nachsehen

5.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Das Hauptresultat des Kapitels ist der nachfolgende Satz. Der Beweis wird erst nach Satz 5.10 geführt.

Satz 5.5 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $y_0 \in G$, $(t_-, t_+) \subset \mathbb{R}$ und $t_0 \in (t_-, t_+)$, $f : G \times (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in y . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und auf $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung $y : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow G$ von

$$\begin{aligned} y' &= f(y, t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Definition 5.6 (Lipschitz-Stetigkeit) Für $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ sei $g : G \times H \rightarrow \mathbb{R}^k$. Wir nennen $g = g(y, z)$ Lipschitz-stetig in y , falls für ein $L > 0$ gilt

$$\|g(x, z) - g(y, z)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x, y \in G, z \in H.$$

Die Funktion g heißt lokal Lipschitz-stetig in y , falls

$$\forall (y, z) \in G \times H \exists r > 0 : g|_{B_r(y, z)} \text{ ist Lipschitz-stetig in } y.$$

Satz 5.7 (Viele Lipschitz-stetige Funktionen) Sei $g : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Dann ist g lokal Lipschitz-stetig.

Satz 5.8 (Eindeutigkeit) Sei $f : G \times [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig in y und $y_0 \in G \subset \mathbb{R}^n$, $T \in [t_0, \infty) \cup \{+\infty\}$. Die Wege y und z seien Lösungen von

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), t) & \forall t \in (t_0, T) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y &\text{ stetig differenzierbar.} \end{aligned}$$

Dann gilt $y \equiv z$ auf $[t_0, T)$.

Lemma 5.9 (Rückwärts lösen) Eine Funktion γ ist Lösung des Rückwärts-Problems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t), t) & \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y &\text{ stetig differenzierbar auf } [t_0 - \varepsilon, t_0] \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(t_0 - t)$ eine Lösung des Vorwärts-Problems ist:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -f(y(t), t_0 - t) & \forall t \in (0, \varepsilon) \\ y(0) &= y_0 \\ y &\text{ stetig differenzierbar auf } [0, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Satz 5.10 (Äquivalente Integralgleichung) Sei $f : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subset \mathbb{R}^n$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(y_0, t_0) \in G \times I$. Dann löst $\gamma : I \rightarrow G$ das System

$$\begin{aligned} y' &= f(y, t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y &\text{ stetig differenzierbar} \end{aligned}$$

genau dann, wenn γ das System

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds & \text{auf } I \\ y &\text{ stetig} \end{aligned}$$

löst.

An dieser Stelle wird der Beweis von Satz 5.5 von Picard-Lindelöf geführt. Aufgrund unserer Vorarbeiten muss lediglich die Existenz einer Lösung der Integralgleichung nachgewiesen werden. Dies geschieht mit dem Banach'schen Fixpunktsatz.

Lemma 5.11 (Zusammensetzen von Lösungen) Sei $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 < t_1 < t_2$. Die Abbildungen $\gamma_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien (auf den jeweiligen Intervallen) stetig differenzierbar und Lösungen von

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad \forall t. \quad (*)$$

Falls weiterhin die Stetigkeitsbedingung $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ erfüllt ist, so ist die zusammengesetzte Funktion

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{falls } t \leq t_1 \\ \gamma_2(t) & \text{falls } t > t_1 \end{cases}$$

Lösung von (*) auf $[t_0, t_2]$.

Durch ein Fortsetzungsargument lässt sich zeigen: Für Lipschitz-stetige Funktionen $f : G \times [t_0, T)$ und Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ gilt: Die Lösung zu $y(t_0) = y_0$ existiert entweder für alle Zeiten, oder sie läuft in endlicher Zeit zum Rand von G (bzw. nach ∞). Die Argumentation ist wie im Beweis von Satz 5.15.

Definition 5.12 (Differentialgleichung höherer Ordnung) Ein System der Ordnung $N \geq 1$ ist gegeben durch eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \times [t_0, T) = \mathbb{R}^{n \cdot N} \times [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die Gleichung lautet

$$y^{(N)}(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} \right)^{(N)} = f(y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t), t).$$

Satz 5.13 Jedes System N -ter Ordnung lässt sich als System 1-ter Ordnung schreiben: Setze $z(t) = (z_0(t), z_1(t), \dots, z_{N-1}(t)) \in \mathbb{R}^{n \cdot N}$ und fordere $z_k(t) = y^{(k)}(t)$. Dann lautet das System für z

$$z'(t) = F(z(t), t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}(t) \\ f(z(t), t) \end{pmatrix}.$$

Korollar: Für Lipschitz-stetige f gilt ein lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen N -ter Ordnung. Als Anfangswerte müssen $y(t_0) = y_0, \dots, y^{(N-1)}(t_0) = y_{N-1}$ vorgegeben werden.

5.3 Lineare Differentialgleichungen

Satz 5.14 (Gronwall-Ungleichung) Sei $y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $y(t) \geq 0$ für alle t und

$$y'(t) \leq \lambda \cdot y(t) + c$$

auf $[0, T)$ für Konstanten $\lambda, C \geq 0$. Sei weiter $y(0) = y_0$ für $y_0 \geq 0$. Dann gilt

$$y(t) \leq z(t) \quad \forall t \in [0, T),$$

wobei z die Lösung von

$$z' = \lambda \cdot z + c, \quad z(0) = y_0$$

ist.

Satz 5.15 (Globaler Existenzsatz für lineare Differentialgleichungen) Für $T \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ seien $A : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert zu beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ auf dem gesamten Intervall $[t_0, T)$ eine Lösung y von

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y &\text{ stetig differenzierbar.} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Satz 5.16 (Homogene lineare Gleichung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Definiere

$$L_H := \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig differenzierbar} : \gamma'(t) = A(t)\gamma(t) \forall t \in I\}.$$

Dann ist L_H ein n -dimensionaler Vektorraum. Eine Basis ist $y_1, \dots, y_n \in L_H$, wobei

$$y'_k(t) = A(t)y_k(t), \quad y_k(t_0) = e_k$$

für beliebige $t_0 \in I$.