

# Analysis I

TU Dortmund, Wintersemester 2019/20

**Prof. Dr. Ben Schweizer**

## Inhaltsverzeichnis

### 1 Reelle Zahlen

1.1	Logische Grundlagen: Aussagen, Beweise, Mengen . . . . .	3
1.2	Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ . . . . .	3
1.3	Vollständigkeit und $\mathbb{R}$ . . . . .	3

### 2 Konvergenz

2.1	Zahlenfolgen und Grenzwerte . . . . .	4
2.2	Konvergenzkriterien . . . . .	5
2.3	Topologische Grundbegriffe . . . . .	5
2.4	Reihen . . . . .	6

### 3 Stetigkeit

3.1	Stetige Funktionen . . . . .	8
3.2	Sätze über stetige Funktionen . . . . .	8
3.3	Wichtige reelle Funktionen . . . . .	9

### 4 Differentiation

4.1	Differenzierbare Funktionen . . . . .	10
-----	---------------------------------------	----

4.2	Geometrische Anwendungen . . . . .	10
4.3	Taylor-Reihen . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Integration</b>	
5.1	Das Riemannsches Integral . . . . .	12
5.2	Integration und Differentiation . . . . .	14
5.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Approximation von Funktionen</b>	
6.1	Taylor-Reihen und Restglieddarstellungen . . . . .	15
6.2	Fourier-Reihen . . . . .	16

## Einleitung

*Über das Wesen der Mathematik, Modelle*

*Themen der Analysis I, Ziele der Vorlesung*

# Kapitel 1 Reelle Zahlen

## 1.1 Logische Grundlagen: Aussagen, Beweise, Mengen

*Aussagen, Implikationen, Beweise, Beweistypen, Quantoren, Mengen, Rechnen mit Mengen*

**Satz:**  $\sqrt{2}$  ist nicht rational.

**Satz:**  $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ .

**Satz:** Jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}$  besitzt ein kleinstes Element.

## 1.2 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$ , $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

*Peano Axiome für  $\mathbb{N}$ , Gruppen, Inverse der Addition,  $\mathbb{Z}$ , Inverse der Multiplikation,  $\mathbb{Q}$ , Anordnung, Der Körper  $F_2$ , Absolutbetrag*

$\mathbb{Z}$  ist eine additive Gruppe,  $\mathbb{Q}$  ist ein angeordneter Körper.

Zusätzliche Eigenschaften der Anordnung:  $w < x, y < z \Rightarrow w + y < x + z$  und  $0 < w \iff -w < 0$  und  $x < y, y < z \Rightarrow x < z$  und  $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$ .

**Satz:** Die Menge  $\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p^2 \leq 2q^2\}$  besitzt kein maximales Element.

### 1.3 Vollständigkeit und $\mathbb{R}$

*Schranken, maximale und minimale Elemente, Suprema und Infima, das Vollständigkeitsaxiom (V), der Körper  $\mathbb{R}$ , das Archimedische Axiom*

(V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

Bem:  $\sup A$  ist (falls existent) eindeutig bestimmt.

$\mathbb{R}$  ist ein vollständiger, angeordneter Körper.

**Satz:**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist unbeschränkt.

**Satz** (Archimedisches Axiom): Zu beliebigen reellen Zahlen  $x, y > 0$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $nx > y$ .

**Satz** (Bernoulli Ungleichung): Für  $x \geq 0$  gilt  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

**Satz:** Zu  $b > 1$  und  $M > 0$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b^n > M$ .

## Kapitel 2 Konvergenz

### 2.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

*Konvergenz von Folgen, Nullfolgen, Formeln für Grenzwerte, Teilfolgen, Bestimmte Divergenz*

**Def.** (Folge): Formal ist eine Folge eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} \ni k \mapsto a_k \in \mathbb{R}$ .

**Def.** (Konvergenz):  $a_k \rightarrow a : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : (|a_k - a| < \varepsilon \forall k \geq K)$

**Satz:** Limiten sind eindeutig. Konvergente Folgen sind beschränkt.

Bem.: Umgekehrte Dreiecksungleichung  $|a - b| \geq |a| - |b|$

**Satz** (Rechenregeln für Folgen): Summen, Produkte und Quotienten von Folgen, Anordnung der Grenzwerte, Einquetschkriterium.

**Def. (Teilfolge):**  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Teilfolge von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , falls eine monotone Abbildung  $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_k = a_{\kappa(k)} \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Bem.:** Für eine konvergente Folge  $a_k \rightarrow a \in \mathbb{R}$  konvergiert auch jede Teilfolge gegen  $a$ .

**Def. (Bestimmte Divergenz):** Wir schreiben  $a_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , falls gilt:  $\forall C \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{N} : a_k \geq C \forall k \geq K$ .

## 2.2 Konvergenzkriterien

*Monotone Folgen, streng monotone Folgen, Berechnung von Quadratwurzeln, Oberer/Unterer Limes, Cauchy-Folgen*

**Satz (Monotoniekriterium):** Jede Folge, die monoton und beschränkt ist, konvergiert.

**Satz (Quadratwurzel):** Für  $a > 0$  konvergiert die rekursiv definierte Folge  $x_{k+1} := (x_k + a/x_k)/2$  mit  $x_0 := a + 1$  gegen eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$ . Es gilt  $x^2 = a$ .

**Def. (lim sup):** Für eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  betrachten wir die Mengen  $A_n := \{a_j \mid j \geq n\} \subset \mathbb{R}$ . Drei Fälle können auftreten: 1.)  $A_n$  ist unbeschränkt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . In diesem Fall setzen wir  $\limsup_k a_k := +\infty$ . 2.) Die Folge  $b_n := \sup A_n$  ist beschränkt. Wir setzen  $\limsup_k a_k := \lim_n b_n$  (Limes existiert nach Monotoniekriterium). 3.) Bestimmte Divergenz  $b_n \rightarrow -\infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir setzen  $\limsup_k a_k := -\infty$ .

**Satz (Teilfolgen und lim sup):** Jede beschränkte Folge  $(a_k)_k$  besitzt eine Teilfolge, die gegen  $A := \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \in \mathbb{R}$  konvergiert.

**Satz:** Eine Folge  $(a_k)_k$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn  $\limsup_k a_k = a = \liminf_k a_k$ .

**Def. (Cauchy-Folgen):** Eine Folge  $(a_k)_k$  ist Cauchy-Folge, falls:  $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n, m \geq K$ .

**Bem.:** Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

**Satz (Cauchy-Kriterium):** Jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

**Ausblick:** Für metrische Räume  $(M, d)$  definiert man:  $(M, d)$  ist *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert.

## 2.3 Topologische Grundbegriffe

*Offene und abgeschlossene Mengen, Häufungspunkte, der Satz von Bolzano-Weierstraß, Folgenkompaktheit, Abzählbarkeit*

Lemma:  $a_k \rightarrow a \in A$  und  $A$  offen. Dann:  $\exists K \in \mathbb{N} : a_k \in A \forall k \geq K$ .

**Satz:** Für  $A \subset \mathbb{R}$  sind folgende Aussagen äquivalent: (1)  $A$  ist abgeschlossen. (2) für jede Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $a_k \rightarrow a$  in  $\mathbb{R}$  gilt:  $a \in A$ .

**Def. (Häufungspunkt):**  $a \in \mathbb{R}$  ist Häufungspunkt der Folge  $(a_k)_k$ , falls gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \forall K \in \mathbb{N} \exists k \geq K : |a_k - a| < \varepsilon$ .

**Satz (Bolzano-Weierstraß in  $\mathbb{R}$ ):** Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Häufungspunkt.

**Satz (Variante von B.-W.):** Für  $A \subset \mathbb{R}$  sind folgende Aussagen äquivalent: (1)  $A$  ist abgeschlossen und beschränkt. (2) jede Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A$  hat einen Häufungspunkt in  $A$ .

**Def (Abzählbarkeit):**  $M$  ist abzählbar, falls es eine surjektive Abbildung  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow M$  gibt.

**Satz:** Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

**Cor.:**  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

**Satz:**  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

## 2.4 Reihen

*Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien, alternierende Reihen, absolute Konvergenz, Umordnungen, Produkte von Reihen*

Für Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  hat das Symbol  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit zwei Bedeutungen: (A) Es bezeichnet die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummen,  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ . (B) Es bezeichnet, falls existent, den Grenzwert  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  der Partialsummen.

Bsp.:  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$  für  $q \in (0, 1)$ .

**Satz:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent  $\Rightarrow (a_k)_k$  ist eine Nullfolge.

**Satz (Leibniz Kriterium):** Sei  $(a_k)_k$  eine monoton fallende Nullfolge mit  $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert die alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ .

Bsp.: Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1}$  konvergiert.

**Def.:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt *absolut konvergent*, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist.

Bem.: Absolut konvergente Reihen sind konvergent.

**Satz (Majorantenkriterium):** Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergent mit  $c_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ . Für die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gelte  $|a_k| \leq c_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

Beispiel: Für  $\mathbb{N} \ni m \geq 2$  konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-m}$ .

**Satz (Quotientenkriterium):** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a_k \neq 0 \forall k \geq k_0$  für ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Für eine Zahl  $\Theta \in (0, 1)$  gelte  $|a_{k+1}/a_k| \leq \Theta \forall k \geq k_0$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

**Satz (Kleiner Umordnungssatz):** Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine absolut konvergente Reihe mit Wert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ . Dann gilt für jede bijektive Abbildung  $\Phi: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  und die dadurch definierte Umordnung  $b_k = a_{\Phi(k)}$ , dass  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ .

**Def. (beliebige Indexmengen):**  $M$  sei eine beliebige abzählbar unendliche Indexmenge,  $a_i \in \mathbb{R}$  für  $i \in M$ . Dann heißt  $\sum_{i \in M} a_i$  absolut konvergent, falls für eine  $C_0 \in \mathbb{R}$  gilt:  $\sum_{i \in E} |a_i| \leq C_0$  für jede endliche Indexmenge  $E \subset M$ . Für eine bijektive Abbildung  $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow M$  setzen wir

$$\sum_{i \in M} a_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_{\Phi(k)}.$$

**Satz (Großer Umordnungssatz):** Sei  $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$  eine Indexmenge, die als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Indexmengen geschrieben werden kann, und  $\sum_{\alpha \in M} a_{\alpha}$  absolut konvergent. Dann gilt

$$\sum_{i \in M} a_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in I_i} a_{\alpha}.$$

Bsp. (Erwartungswert der geometrischen Verteilung): Für  $q \in (0, 1)$  gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = 1/(1-q)^2$ .

**Satz (Produkt von Reihen):** Falls  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k$ , beide mit absoluter Kon-

vergenz, so gilt

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \right) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j$$

mit absoluter Konvergenz auf der rechten Seite.

**Def** (Exponentialfunktion): Für  $x \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$e^x := \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

**Satz:** Die Exponentialreihe konvergiert absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

## Kapitel 3 Stetigkeit

### 3.1 Stetige Funktionen

*Funktionen, Stetigkeit, Operationen mit Funktionen, Verkettung, Kriterien für Stetigkeit, Stetigkeit der Exponentialfunktion*

**Def** (Stetigkeit): Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Für  $a \in D$  heißt  $f$  *stetig in  $a$* , falls für jede Folge  $x_k \rightarrow a$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $x_k \in D$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $f(x_k) \rightarrow f(a)$ . Die Funktion  $f$  heißt  *$f$  stetig*, falls sie in jedem Punkt  $a \in D$  stetig ist.

**Satz:** Für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind auch  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und, auf seinem **Definitionsbereich**  $\tilde{D} := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ , die Funktion  $\frac{f}{g}$  stetig.

**Satz** ( $\varepsilon$ - $\delta$  Definition): Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D, |x - a| < \delta$$

**Satz:** Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

### 3.2 Sätze über stetige Funktionen

*Zwischenwertsatz, Annahme der Extrema, gleichmäßige Stetigkeit, Approximation durch Treppenfunktionen, der Raum  $C^0([a,b])$ , gleichmässige Konvergenz*

**Satz** (Zwischenwertsatz): Sei  $D = [a, b]$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $y \in \mathbb{R}$ . Es gelte  $f(a) < y < f(b)$ . Dann existiert  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y$ .

**Satz und Def.** (Logarithmus): Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  besitzt eine Umkehrfunktion. Diese bezeichnen wir mit  $\log$ . Also: Für  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\exp \circ \log = \text{id}_{(0, \infty)}$  und  $\log \circ \exp = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**Satz** (Maximum stetiger Funktionen): Sei  $D = [a, b]$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  beschränkt und es gibt  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in D\} \in \mathbb{R}$ .

**Def.** (gleichmäßige Stetigkeit): Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

**Satz:** Sei  $D = [a, b]$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

**Satz:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es Treppenfunktionen  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$  und  $|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ .

**Def.** (gleichmäßige Konvergenz): Eine Funktionenfolge  $(f_k)_k$  konvergiert gleichmäßig gegen  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K : |f_k(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

**Satz:** Sei  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(f_k)_k$  konvergiere gleichmäßig gegen  $g$ . Dann ist auch  $g$  stetig.

### 3.3 Wichtige reelle Funktionen

*Umkehrfunktionen, Logarithmus, Allgemeine Potenzen, Sinus und Cosinus, die Zahl  $\pi$*

**Satz** (Umkehrfunktion): Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und stetig. Mit  $A := f(a)$  und  $B := f(b)$  gibt es eine Umkehrfunktion  $g = f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ , es gilt also  $g \circ f = \text{id}$ . Die Funktion  $g$  ist stetig und streng monoton wachsend.

**Def.:**  $a^x := \exp_a(x) := \exp(x \log(a))$ .

**Satz:** Der Ausdruck  $a^x$  stimmt mit früheren Definitionen überein: für  $x = n \in \mathbb{N}$  ist  $a^x$  das  $n$ -fache Produkt von  $a$ 's, für  $x = -y$  gilt  $a^{-y} = 1/a^y$ , für  $x = 1/n$  ist  $a^x$  die  $n$ -te Wurzel von  $a$ , für  $a = e$  gilt  $a^x = e^x$ . Rechenregeln:  $a^{x+y} = a^x a^y$  und  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

**Def.:** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  und  $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  schreiben wir  $f(x) \rightarrow c$  für  $x \rightarrow a$  falls zwei Bedingungen erfüllt sind: (1) es gibt mindestens eine Folge  $x_k \rightarrow a$  mit  $x_k \in D$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . (2) Für jede solche Folge gilt  $f(x_k) \rightarrow c$ .

**Def.:** Sinus und Cosinus werden für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert durch die absolut konvergenten Reihen

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Als gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind  $\sin$  und  $\cos$  stetig.

**Def.:** Sei  $x_0$  die erste positive Nullstelle von  $\cos$ . Wir setzen  $\pi := 2x_0$ .

**Satz:** Additionstheoreme für  $\sin$  und  $\cos$  und Folgerungen.

## Kapitel 4 Differentiation

### 4.1 Differenzierbare Funktionen

*Differenzierbarkeit, Produktregel, Quotientenregel, Ableitung der Umkehrfunktion, Kettenregel*

**Def.:** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in D$  ein Punkt.  $f$  heißt differenzierbar in  $\bar{x}$ , falls für ein  $c \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ \bar{x} \neq x \in D}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = c.$$

In diesem Fall:  $f'(\bar{x}) = c$ , die Zahl  $c$  ist die Ableitung von  $f$  in  $\bar{x}$ .

**Satz:** Für differenzierbare Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  gelten: Summenregel  $(f + g)' = f' + g'$ , Produktregel  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$  und, in Punkten mit  $g \neq 0$ , Quotientenregel  $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ .

**Satz (Ableitung der Umkehrfunktion):** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton mit Umkehrfunktion  $\varphi$ . In Punkten  $y = f(x)$  mit  $f'(x) \neq 0$  ist  $\varphi$  differenzierbar mit  $\varphi'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ .

**Satz (Kettenregel):** Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f(D) \subset E$ . Dann ist  $g \circ f$  differenzierbar und es gilt  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .

## 4.2 Geometrische Anwendungen

*Ableitung in lokalen Extrema, Mittelwertsatz, Monotone Funktionen, höhere Ableitungen, hinreichendes Kriterium für Maxima, Konvexität*

**Def. (lokales Maximum):**  $f$  hat in  $x$  ein lokales Maximum, falls für ein  $\delta > 0$  gilt:  $f(y) \leq f(x) \forall y \in (x - \delta, x + \delta)$ .

**Satz (notwendige Bedingung):** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $x$  sei ein lokales Maximum. Dann gilt  $f'(x) = 0$ .

**Satz (Mittelwertsatz I):** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann existiert  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Korollare: 1.)  $f' \equiv 0 \Rightarrow f$  ist konstant. 2.)  $f' \geq 0 \Rightarrow f$  ist monoton wachsend.

**Satz (hinreichende Bedingung):** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}$ . In  $x \in D$  gelte  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$ . Dann hat  $f$  in  $x$  ein lokales Maximum.

**Def. (Konvexität):** Sei  $D$  ein Intervall.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, falls für alle  $x_1, x_2 \in D$  und alle  $\lambda \in [0, 1]$  gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

**Satz:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f$  zweimal differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann ist  $f$  konvex.

### 4.3 Taylor-Reihen

*Approximation mehrfach differenzierbarer Funktionen, Definition der Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt  $x_0$ , Konvergenzradius einer Reihe*

**Satz** (Charakterisierung der Ableitung): Sei  $D \subset \mathbb{R}$  offen,  $x_0 \in D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$f \text{ ist diff'bar in } x_0 \iff \begin{cases} \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x) \\ \text{mit } \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \text{ f\"ur } x_0 \neq x \rightarrow x_0 \end{cases}$$

In diesem Fall gilt  $f'(x_0) = c$ .

**Satz** (Einfache Regel von l'Hospital): Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $D \subset \mathbb{R}$  offen,  $x_0 \in D$ . Es gelte  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  und  $g(x) \neq 0$  f\"ur  $x \neq x_0$  und  $g'(x_0) \neq 0$ . Dann gilt, f\"ur  $x_0 \neq x \rightarrow x_0$ ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Def.** (Taylor-Reihe): Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft diff'bar auf dem offenen Intervall  $D$ ,  $x_0 \in D$  ein Punkt. Dann hei\ss t die Reihe

$$T_{x_0}^f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

die Taylor-Reihe von  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Warnungen: 1.) F\"ur  $x \neq x_0$  muss  $T_{x_0}^f(x)$  nicht konvergieren. 2.) Falls f\"ur  $x \neq x_0$  die Reihe  $T_{x_0}^f(x)$  konvergiert, so muss *nicht*  $T_{x_0}^f(x) = f(x)$  gelten.

**Satz** (Konvergenzradius): Sei  $(a_0, a_1, \dots)$  eine Folge von Koeffizienten,  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Punkt und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  die zugeh\"orige Potenzreihe. Dann existiert ein *Konvergenzradius*  $r \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$  mit den Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe ist *absolut konvergent* f\"ur alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < r$
2. Die Potenzreihe ist *divergent* f\"ur alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > r$

Für alle  $r_0 < r$  gilt: Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$ .

## Kapitel 5 Integration

### 5.1 Das Riemannsche Integral

*Integral für Treppenfunktionen, Oberintegral und Unterintegral, Riemann Integral als lineares monotonen Funktional, Mittelwertsatz, Riemannsche Summen*

**Def.** (Integral für Treppenfunktionen): Für eine Treppenfunktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit Sprungstellen  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  und Werten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$\int_a^b \varphi := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1})$$

**Satz:** Der Raum  $T[a, b]$  der Treppenfunktionen ist ein Vektorraum und  $f : T[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein lineares, monotonen Funktional.

**Def.** (Ober- und Unterintegral): Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \int^* f &:= \int_a^{b,*} f := \inf \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f \right\}, \\ \int_* f &:= \int_{a,*}^b f := \sup \left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in T[a, b], \psi \leq f \right\}. \end{aligned}$$

**Satz:** Das Oberintegral ist subadditiv und positiv 1-homogen:  $\int^*(f + g) \leq \int^* f + \int^* g$  und  $\int^* \lambda f = \lambda \int^* f$  für  $\lambda \geq 0$ .

**Def.** (Riemann-Integral): Eine Funktion heißt Riemann-integrierbar (R-intbar), falls Ober- und Unterintegral übereinstimmen. In diesem Fall setzen wir

$$\int f := \int^* f = \int_* f.$$

**Satz:**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist R-intbar genau dann, wenn gilt:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi \leq f \leq \varphi$ ,  $\psi, \varphi \in T[a, b]$ :  $\int \varphi \leq \int \psi + \varepsilon$ .

**Satz:** Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist R-intbar.

**Satz:** Jede monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist R-intbar.

**Satz:** Der Raum  $R[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist R-intbar}\}$  ist ein Vektorraum und  $\int : R[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein lineares und monotones Funktional.

**Satz:** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  R-intbar. Dann sind auch die Funktionen  $f_+$ ,  $|f|$ ,  $f \cdot g$  und  $|f|^p$  für  $p \in [1, \infty)$  R-intbar.

**Satz (Mittelwertsatz II):** Seien  $f, \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\varphi \geq 0$ . Dann existiert ein Punkt  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Insbesondere ( $\varphi \equiv 1$ ): Es existiert ein Punkt  $\xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$ .

**Satz (Riemann'sche Summen):** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-intbar und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $\delta > 0$ , so dass für jede Unterteilung  $a = x_0 < \dots < x_m = b$  mit  $x_j - x_{j-1} < \delta \forall j \leq m$  und jede Wahl von Stützstellen  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  gilt

$$\left| \int_a^b f - \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon.$$

## 5.2 Integration und Differentiation

*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktionen, Berechnung von Integralen, Substitutionsregel, Partielle Integration*

Hier immer:  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall mit  $a \in I$  und  $I \neq \{a\}$ .

**Satz (Hauptsatz, 1. Version):** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wir betrachten

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) := \int_a^x f$$

Dann ist  $F$  differenzierbar in  $I$  und es gilt  $F' = f$ .

**Def.:** Zu  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion zu  $f$ , falls  $F$  differenzierbar ist mit  $F' = f$ .

**Satz** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Dann gilt für Punkte  $a, b \in I$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad =: F \Big|_a^b.$$

**Satz** (Substitutionsregel): Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

**Satz** (Partielle Integration): Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_a^b f g' = - \int_a^b f' g + (f g) \Big|_a^b.$$

**Satz:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diffbar. Für  $k \in \mathbb{R}$  setze  $F(k) := \int_a^b f(x) \sin(kx) dx$ . Dann gilt  $F(k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

### 5.3 Uneigentliche Integrale

**Definition uneigentlicher Integrale, Gamma-Funktion**

**Def.** (Uneigentliches Integral): Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $a < b$ . Falls  $f$  über jedes Teilintervall  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$  integrierbar ist und für ein  $c \in (a, b)$  die Grenzwerte

$$\int_a^c f := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f \quad \text{und} \quad \int_c^b f := \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f$$

existieren, so nennen wir  $f$  *uneigentlich integrierbar* über  $(a, b)$  und setzen

$$\int_a^b f := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f + \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f.$$

**Def. und Satz (Gamma-Funktion):** Für  $x > 0$  setzen wir  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ . Dann ist  $\Gamma$  wohldefiniert (als uneigentliches Integral) und es gilt  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz (Integral-Vergleichskriterium für Reihen):** Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

## Kapitel 6 Approximation von Funktionen

### 6.1 Taylor-Reihen und Restglieddarstellungen

*Restgliedabschätzungen für Taylor-Reihen*

**Satz (Taylor'sche Formel):** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(n+1)$ -mal stetig diffbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

**Satz (Lagrange Restglied):** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(n+1)$ -mal stetig diffbar. Dann gibt es zwischen  $x_0$  und  $x$  einen Punkt  $\xi$ , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}.$$

## 6.2 Fourier-Reihen

*Fourier-Koeffizienten und Fourier-Reihen,  $L^2$ -Skalarprodukt, Besselsche Ungleichung und Vollständigkeitsrelation*

**Def.** (Fourier-Koeffizienten): Zu  $f \in R[0, 2\pi]$  heißen

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (\text{für } n > 0) \quad \text{und} \quad a_0 := \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$
$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n > 0)$$

die *Fourier-Koeffizienten* von  $f$ . Die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

heißt die *Fourier-Reihe* von  $f$ .

Notation: Für eine abstrakte Beschreibung verwenden wir  $V := R[0, 2\pi]$ , darauf das Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ ,  $\|f\|_2^2 := \langle f, f \rangle$  und das orthogonale System  $e_k \in V$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , gegeben durch  $e_k(x) := \cos(kx)$  für  $k > 0$ ,  $e_0(x) = 1/\sqrt{2}$ , und  $e_k(x) := \sin(-kx)$  für  $k < 0$ .

**Satz** (Bessel): Sei  $f \in V$  mit Fourier-Koeffizienten  $a_k := \langle f, e_k \rangle$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n a_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |a_k|^2.$$

**Cor. 1** (Bessel'sche Ungleichung): Für  $f \in V$  mit Fourier-Koeffizienten  $a_k$  gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

**Def.:** Eine Funktionenfolge  $f_n \in R[a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $f \in R[a, b]$ , falls  $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Cor. 2** (Vollständigkeitsrelation): Für  $f \in V$  mit Fourier-Koeffizienten  $a_k$  sind äquivalent:

(i) Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

(ii) Die Fourier-Reihe von  $f$  konvergiert im quadratischen Mittel.

**Satz:** Sei  $f \in T[0, 2\pi]$ , also eine Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  im quadratischen Mittel gegen  $f$ .

**Satz:** Sei  $f \in R[0, 2\pi]$ , also Riemann-integrierbar. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  im quadratischen Mittel gegen  $f$ .