Konzentrationsungleichungen

Präsenzübung

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. *Sei P eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Zeigen Sie: Die Abbildung $Q \mapsto D(Q\|P)$ ist konvex auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsdichten.*

$$D(Q\|P) = \sup_Z \left[\mathbb{E}_Q Z - \log \mathbb{E}_P(e^Z) \right]$$

$$\mathbb{E}_{\alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2}(Z) = \int Z \, d(\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2)$$
$$= \alpha \int Z \, dQ_1 + (1-\alpha) \int Z \, dQ_2$$
$$= \alpha \mathbb{E}_{Q_1}(Z) + (1-\alpha) \mathbb{E}_{Q_2}(Z)$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}_Q Z - \log \mathbb{E}(e^Z)$ konvex $\forall Z$

Suprema konvexe Fkt. sind konvex

$\Rightarrow$ $Q \mapsto D(Q\|P)$ konvex

Beweis. Wir haben (Korollar 4.39):

$$D(Q\|P) = \sup_Z \left[\mathbb{E}_Q Z - \log(\mathbb{E}\mathrm{e}^Z)\right],$$

wobei das Supremum über Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\mathrm{e}^Z < \infty$ gebildet wird. Nun ist $Q \mapsto \mathbb{E}_Q Z$ linear, also insbesondere konvex. Damit ist auch $Q \mapsto \mathbb{E}_Q Z - \log(\mathbb{E}\mathrm{e}^Z)$ konvex und da das Supremum konvexer Funktionen wieder konvex ist, ist auch $Q \mapsto \sup_Z \left[\mathbb{E}_Q Z - \log(\mathbb{E}\mathrm{e}^Z)\right]$ konvex. $\square$

Abgabe bis zum 21.06.2021