

P, Q W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ TV-Abstand $V(P, Q) = \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)|$

1. Ist das eine Metrik?

2. $V(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |P(x) - Q(x)|$

1. Symmetrisch: ✓

$$V(P, Q) = 0$$

$$P \neq Q \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}: P(A) \neq Q(A)$$

$$\Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)| > 0$$

Δ -Ungl.: $\forall P, Q, R: V(P, R) \leq V(P, Q) + V(Q, R)$

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - R(A)| \leq \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)| + \sup_{A \in \mathcal{A}} |Q(A) - R(A)|$$

$$\leq \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)| + \sup_{A \in \mathcal{A}} |Q(A) - R(A)|$$

$$\leq \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)| + \sup_{A \in \mathcal{A}} |Q(A) - R(A)| \quad \checkmark$$

2. $V(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |P(x) - Q(x)|$

$$A_+ := \{x: P(x) \geq Q(x)\}$$

$$\forall A \in \mathcal{A}: P(A) - Q(A) = \sum_{x \in A} P(x) - Q(x) \leq \sum_{x \in A \cap A_+} P(x) - Q(x) \leq \sum_{x \in A_+} P(x) - Q(x) = P(A_+) - Q(A_+)$$

$$Q(A) - P(A) = 1 - Q(A^c) - (1 - P(A^c)) = P(A^c) - Q(A^c) \leq P(A_+^c) - Q(A_+^c) \leq Q(A_+^c) - P(A_+^c)$$

$$V(P, Q) = \frac{1}{2} (P(A_+) - Q(A_+) + Q(A_+^c) - P(A_+^c)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in A_+} P(x) - Q(x) + \sum_{x \in A_+^c} Q(x) - P(x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |P(x) - Q(x)|$$