

§ 4.14

Brunn-Minkowsky - Ungl.

aus der maßtheoretischen Konvexgeometrie
relevant f. Analysis & Informationstheorie

Hier: $\Rightarrow$ Isoperimetrische Ungl $\Rightarrow$ Konzentrationsangl.

Für $A, B \subset \mathbb{R}^m$ sei

$$A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$$

für $c > 0$:

$$c \cdot A = \{c \cdot x \mid x \in A\}$$

Für meßbares $A \subset \mathbb{R}^m$ sei $\text{Vol}(A)$ Maß von A .

Thm 4.23 (Brunn-Minkowsky-Ungl.)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^m$ nichtleere kompakte Mengen. Dann

gilt für $\lambda \in [0, 1]$

$$\text{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B)^{1/m} \geq (1-\lambda)\text{Vol}(A)^{1/m} + \lambda\text{Vol}(B)^{1/m}$$

[Gilt auch ohne Kompaktheitsann.] allerdings muss man

dann die Meßbarkeit von $A+B$ beweisen.

Motivation im 1-d Fall

$A \subset \mathbb{R}$ meßbar. $c \geq 0$, dann $\text{Vol}(cA) = c \text{Vol}(A)$

Es reicht also z.z.

$$A, B \subset \mathbb{R} \text{ kompakt} \Rightarrow \text{Vol}(A+B) \geq \text{Vol}(A) + \text{Vol}(B)$$

[Denn dann folgt

$$\begin{aligned} (1-\lambda) \text{Vol}(A) + \lambda \text{Vol}(B) &= \text{Vol}((1-\lambda)A) + \text{Vol}(\lambda B) \\ &\leq \text{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B) \end{aligned}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Vol}(A+\alpha) = \text{Vol}(A)$$

$$\text{Vol}(B+\beta) = \text{Vol}(B)$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A+\alpha + B+\beta) &= \text{Vol}(x+y+\alpha+\beta \mid x \in A, y \in B) \\ &= \text{Vol}(A+B) \end{aligned}$$

Seien also α, β so daß $\tilde{A} = \alpha + A \subset (-\infty, 0]$

$$\tilde{B} = B + \beta \subset [0, \infty), \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$$

d.h.

$$\alpha = -\sup A, \beta = -\inf B$$

Dann gilt wegen $0 \in \tilde{A} : \tilde{B} \subset \tilde{A} + \tilde{B}$

$$0 \in \tilde{B} : \tilde{A} \subset \tilde{A} + \tilde{B}$$

also

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} \subset \tilde{A} + \tilde{B}$$

$$\Rightarrow \text{Val}(\tilde{A}) + \text{Val}(\tilde{B}) \stackrel{\tilde{A} \wedge \tilde{B} = 103}{=} \text{Val}(\tilde{A} \vee \tilde{B}) \leq \text{Val}(\tilde{A} + \tilde{B}) \quad \square$$

Der allg. Fall der Brunn-Mink Ungl. folgt aus

Thm 4.24 (PRÉKOPA-LEINDER INEQ)

Seien $\lambda \in (0,1)$, $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ meßbar.
so dass $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda$$

Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \right)^\lambda$$

Beweis Induktion nach Dim n

1- Dim Fall, Betrachte zuerst f und g beschränkt

und $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = 1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$

Dann

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^1 \text{Val}(\{x \mid f(x) \geq t\}) dt$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_0^1 \text{Val}(\{x \mid g(x) \geq t\}) dt$$

Für $s \in [0, 1]$ und $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) \geq s, g(y) \geq s$
gilt nach Ann des Thms:

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \geq s^{1-\lambda+\lambda} = s$$

Also

$$(1-\lambda) \{x : f(x) \geq s\} + \lambda \{y : g(y) \geq s\}$$

$$\subset \{z \in \mathbb{R} \mid h(z) \geq s\}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_0^\infty \text{Val}(\{x \mid h(x) \geq t\}) dt$$

$$\geq \int_0^1 \text{Val}(\{x \mid h(x) \geq t\}) dt$$

$$\geq \int_0^1 dt [\text{Val}((1-\lambda) \{x \mid f(x) \geq s\} + \lambda \{y \mid g(y) \geq s\})]$$

$$\geq (1-\lambda) \int_0^1 \text{Vol} \{ f(x) \geq t \} dt + \lambda \int_0^1 \text{Vol} \{ g(x) \geq t \} dt$$

$\uparrow$ 1-dim Brunn-Minkowski Ungl. wie schon bewiesen

$$\geq (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)^{\lambda}$$

Arithmetisch-Geometrische Mittelwert Ungl. (ii)

f, g beschr. aber:

Falls $0 < \sup f < \infty$ setze $\varphi = f (\sup f)^{-1}$

($\sup f > 0$, sonst $f \equiv 0$ und Ungl. ist trivial)

ebenso $\psi = g (\sup g)^{-1}$, Dann:

$$\begin{aligned} h((1-\lambda)x + \lambda y) &\geq f(x)^{1-\lambda} g(x)^{\lambda} \\ &= \varphi(x)^{1-\lambda} \psi(x)^{\lambda} (\sup f)^{\lambda-1} (\sup g)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sup f)^{1-\lambda} (\sup g)^{\lambda} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx$$

schon bew

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx \right)^{\lambda}$$

durch multiplizieren $\checkmark$

Falls f, g unbeschränkt, wähle Folgen
 $0 \leq f_n \nearrow f$ pldw und $0 \leq g_n \nearrow g$ pldw
 so dass f_n, g_n beschränkt.

Dann:

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f_n(x)^{1-\lambda} g_n(y)^\lambda$$

damit also

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx \geq \left(\int f_n(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int g_n(y) dy \right)^\lambda$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{S. monotone Konvergenz} \\ n \rightarrow \infty}]{\substack{\text{IR}}} \left(\int f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int g(x) dx \right)^\lambda$$

Damit ist 1-dim Fall bewiesen.

Induktionsschritt: Sei Beh. bewiesen in

Dimensionen $d \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Seien $f, g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $\lambda \in (0, 1)$

s.d. Ann des Thm erfüllt. Seien $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow h[(1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)a + \lambda b]$$

$$= h \left[(1-\lambda) (x, a) + \lambda (y, b) \right]$$

$$\geq f(x, a)^{1-\lambda} g(y, b)^\lambda$$

Hier werden a, b fest und x, y variabel betrachtet

Ind Ann

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x, (1-\lambda)a + \lambda b) dx$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, a) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x, b) dx \right)^\lambda$$

Jetzt wollen wir nochmal dem 1-dim Fall anwenden und setzen:

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, a) dx, \quad G(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x, a) dx$$

$$H(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x, a) dx$$

Wir zeigen:

$$H((1-\lambda)a + \lambda b) \geq F(a)^{1-\lambda} G(b)^\lambda$$

was die 1-dim Vorass. ist

Rubini
 $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^m} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} H(a) da$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}} F(a) da \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G(a) da \right)^{\lambda}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x) dx \right)^{\lambda}$$

qed

Kor: 4.25 (Mini Brunn-Minkowski)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, $\lambda \in [0, 1]$. Dann

$$\text{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \text{Vol}(A)^{1-\lambda} \text{Vol}(B)^{\lambda}$$

Bew: Sei $f = \mathbb{1}_A$, $g = \mathbb{1}_B$, $h = \mathbb{1}_{(1-\lambda)A + \lambda B}$

$$\stackrel{\lambda \in (0,1)}{\Rightarrow} f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} = \mathbb{1}_{A \times B}(x, y)$$

$$\leq h((1-\lambda)x + \lambda y)$$

$$x \in A, y \in B \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in (1-\lambda)A + \lambda B$$

Voraus. für Prekopa-Leindler erfüllt.

$$\Rightarrow \text{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B) = \int h \, dx \geq$$

$$\geq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda} = (\text{Vol}(A))^{1-\lambda} (\text{Vol}(B))^{\lambda}.$$

Diese Ungleichheit ist in der Tat schwächer als die echte
 B-M-Ungl. wie man mit Hilfe der arithmetisch-
 geometrischen -Ungl. sieht.

Bew. der B-M-Ungl.

zuerst zeigen wir für $A \neq \emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt:

$$\text{Vol}(A+B)^{1/n} \geq \text{Vol}(A)^{1/n} + \text{Vol}(B)^{1/n} \quad (1)$$

Ist $\text{Vol}(A) \cdot \text{Vol}(B) = 0$, so ist (1) trivial.

Dies schließen wir nun aus und setzen:

$$A' = \text{Vol}(A)^{-1/n} A$$

$$B' = \text{Vol}(B)^{-1/n} B \quad \text{so dass}$$

$$\text{Vol}(A') = 1 = \text{Vol}(B')$$

$$\text{Kon. 4.25} \Rightarrow \forall \lambda \in (0,1) \quad (2)$$

$$\text{Vol}((1-\lambda)A' + \lambda B') \geq \text{Vol}(A')^{1-\lambda} \cdot \text{Vol}(B')^{\lambda} = 1$$

Nun setzen wir:

$$\lambda = \frac{\text{Vol}(B)^{1/n}}{\text{Vol}(B)^{1/n} + \text{Vol}(A)^{1/n}}$$

und wenden wieder ~~Kor 4.25~~ an:

(2)

$$\Rightarrow 1 \leq \text{Vol} \left(\left[1 - \frac{\text{Vol}(B)^{1/m}}{\text{Vol}(B)^{1/m} + \text{Vol}(A)^{1/m}} \right] \frac{A}{\text{Vol}(A)^{1/m}} + \frac{\text{Vol}(B)^{1/m}}{\text{Vol}(B)^{1/m} + \text{Vol}(A)^{1/m}} \frac{B}{\text{Vol}(B)^{1/m}} \right)$$

$$= \text{Vol} \left[\frac{\text{Vol}(A)^{1/m}}{\text{Vol}(B)^{1/m} + \text{Vol}(A)^{1/m}} \frac{A}{\text{Vol}(A)^{1/m}} + \frac{1}{\text{Vol}(A)^{1/m} + \text{Vol}(B)^{1/m}} B \right]$$

$$= \frac{\text{Vol}(A+B)}{(\text{Vol}(A)^{1/m} + \text{Vol}(B)^{1/m})^m}$$

Skalierung um 12^m

$$\Rightarrow \text{Vol}(A)^{1/m} + \text{Vol}(B)^{1/m} \leq \text{Vol}(A+B)^{1/m}$$

Ersetze nun $A \mapsto (1-\lambda)A$

$B \mapsto \lambda B$ so folgt:

$$\text{Vol}((1-\lambda)A)^{1/m} + \text{Vol}(\lambda B)^{1/m} \leq \text{Vol}((1-\lambda)A + \lambda B)^{1/m}$$

$$= ((1-\lambda)^{1/m})^m \text{Vol}(A)^{1/m} + (\lambda^{1/m})^m \text{Vol}(B)^{1/m}$$

✓

