Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 9

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. Sei $(X_1, \dots, X_n)$ endliche Folge von Zufallsvariablen, die fast sicher paarweise verschiedene Werte annehmen und

$$N(X) = |\{\text{wachsende Teilfolge } (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \text{ für } k \leq n \text{ von } x\}| = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

Zeigen sie, dass $\text{Var}(\log_2(N(X))) \leq \mathbb{E}(\log_2(N(X)))$.

$\gamma_j \in \{0, 1\}$

$$T_\nu(x) = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mid \begin{array}{l} x_{i_1} < \dots < x_{i_k} \\ k \in \mathcal{N} \end{array} \right.$$

$$\gamma_j = \begin{cases} 1 & j \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$|T_\nu(x)| \leq 2 |T_\nu(x^{(i)})| \quad \checkmark$$

$\circ$
 $(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n)$

$\nwarrow$ $\searrow$
 $(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 0, \gamma_{i+1}, \dots)$ $(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, 1, \gamma_{i+1}, \dots)$

4.22 $\Rightarrow \square$

Beweis. $\log_2(N(X))$ ist eine kombinatorische Entropie. Wähle dazu $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ und zu jeder Teilfolge von Indizes $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ sodass $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_k}$ ordne einen Vektor $y = (y_1, \dots, y_n)$ wobei $y_i = 1$, falls $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$, sonst $y = 0$ $\square$

Abgabe bis zum 21.06.2021