Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 9

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. 1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 2) = q$ und $\mathbb{P}(X = 3) = 1 - p - q$ wobei $p \in [0, 1]$, $q \in [0, 1 - p]$. Berechnen sie die Entropie

$$H(X) = - \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} p_x \ln(p_x) \right)$$

und verifizieren sie, dass die Gleichverteilung die Entropie maximiert.

2. Seien $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, $Y : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathcal{Y}$ und $Z : \hat{\Omega} \rightarrow \mathcal{Z}$ diskrete Zufallsvariablen. Zeigen sie

$$H((X, Y), Z) = H(X, (Y, Z)) = H(X, Y, Z)$$

Beweis. 1. Es ist

$$H(X) = - (p \ln(p) + q \ln(q) + (1 - p - q) \ln(1 - p - q)).$$

Dies ist differenzierbar und wir berechnen die Ableitungen nach p und q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x)}{\partial p} &= - (\ln(p) + 1 - \ln(1 - p - q) - 1) \\ \frac{\partial H(x)}{\partial q} &= - (\ln(q) + 1 - \ln(1 - p - q) - 1). \end{aligned}$$

Am Maximum müssen beide Ableitungen verschwinden, sodass

$$\begin{aligned} p &\stackrel{!}{=} 1 - p - q \\ q &\stackrel{!}{=} 1 - p - q. \end{aligned}$$

Dies führt auf $q = \frac{1-p}{2}$ und somit folgt

$$p = 1 - p - \frac{1-p}{2} = \frac{1-p}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 1 - p - q = \frac{1}{3}$$

und die Gleichverteilung maximiert die Entropie.

2. Es gilt

$$H((X, Y), Z) = - \sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}} p((x, y), z) \ln(p((x, y), z))$$

wobei $p((x, y), z)$ die Gewichtsfunktion der Verteilung von $(X, Y), Z$ ist. Da

$$\begin{aligned} p((x, y), z) &= \mathbb{P}((X, Y) = (x, y), Z = z) = \mathbb{P}(X = x, Y = y, Z = z) = p(x, y, z) \\ &= \mathbb{P}((X = x, (Y, Z) = (y, z))) = p(x, (y, z)) \end{aligned}$$

ist die Gewichtsfunktion für gegebenes x, y, z gleich den Gewichtsfunktionen von X, Y, Z und $X, (Y, Z)$. Da die Summation auch in jedem Fall über alle x, y, z in $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ läuft, folgt

$$\begin{aligned} H((X, Y), Z) &= - \sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}} p((x, y), z) \ln(p((x, y), z)) \\ &= - \sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}} p(x, y, z) \ln(p(x, y, z)) = H(X, Y, Z) \\ &= - \sum_{x \in \mathcal{X}, (y, z) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}} p(x, (y, z)) \ln(p(x, (y, z))) = H(X, (Y, Z)) \end{aligned}$$

□

Übung 2. Erinnerung: für eine diskrete Zufallsvariable X war die Entropie definiert worden als

$$H(X) := - \sum_{x, p(x) > 0} p(x) \ln p(x).$$

Eine analoge Definition gilt für kontinuierliche Zufallsvariablen mit positiver Dichte. Berechnen Sie $H(X)$ für ein standardnormalverteiltes X .

Beweis. Bezeichne $f_X(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ die Dichte von X . Dann gilt

$$\begin{aligned} H(X) &= - \int f_X(t) \ln f_X(t) dt = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-t^2/2) [\ln(1/\sqrt{2\pi}) + (-t^2/2)] dt \\ &= - \ln(1/\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int \exp(-t^2/2) t^2 dt \\ &= \ln(\sqrt{2\pi}) + \mathbb{E}[X^2]/2 = \ln(\sqrt{2\pi}) + \ln(e^{1/2}) \\ &= \ln(\sqrt{2\pi e}). \end{aligned}$$

□

Übung 3. Sei X eine reelle Zufallsvariable mit symmetrischer Exponentialverteilung, d.h. mit Dichte $\rho(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Zeigen sie, dass für jede differenzierbare Funktion f mit $\text{Var}(f(X)) < \infty$ gilt:

a)

$$\mathbb{E}(f(X)) = f(0) + \mathbb{E}(\text{sgn}(X)f'(X))$$

b)

$$\text{Var}(f(X)) \leq 4\mathbb{E}((f'(X))^2)$$

Beweis. a) Da $\text{Var}(f(X)) < \infty$ ist auch $\mathbb{E}(f(X)) < \infty$ und $\mathbb{E}(f(X)^2) < \infty$, woraus

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-|x|} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-|x|} f(x) = 0$ folgt. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x f(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^x f(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x f'(x) dx - \frac{1}{2} e^x f(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-x} f'(x) dx \\ &= f(0) - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x f'(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} f'(x) dx \\ &= f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) \frac{1}{2} e^x f'(x) dx \\ &= f(0) + \mathbb{E}(\operatorname{sgn}(X) f'(X)). \end{aligned}$$

b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(0) = 0$, da Subtraktion von Konstanten die Varianz nicht ändert. Dann folgt nach Teil a)

$$\operatorname{Var}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)^2) = \mathbb{E}(\operatorname{sgn}(X) 2f(X) f'(X))$$

Durch Anwendung von Cauchy-Schwarz folgt nun

$$\mathbb{E}(f(X)^2) \leq 2 \left(\mathbb{E}((\operatorname{sgn}(X))^2 f(X)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}(f'(X)^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

woraus

$$\mathbb{E}(f(X)^2) \leq 4 \mathbb{E}(f'(X)^2)$$

und somit die Behauptung folgt. □

Übung 4. Sei A eine endliche Teilmenge von $\mathbb{Z}^d$ und sei

$$A_i := \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \mid (x_1, \dots, x_d) \in A\}$$

die orthogonale Projektion von A zur i -ten Koordinate. Zeigen sie mithilfe der Han-Ungleichung:

$$|A|^{d-1} \leq \prod_{i=1}^d |A_i|.$$

Beweis. Sei $X = (X_1, \dots, X_d)$ eine Zufallsvariable, die gleichverteilt auf allen Elementen von A ist und wobei X_i genau die Projektion auf die Koordinate i ist. Dann gilt für die Entropie $H(X) = \log(|A|)$. Weiterhin gilt nach der Han-Ungleichung

$$H(X) \leq \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^d H(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n).$$

Jeder Punkt, der von $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ angenommen werden kann liegt auch in A_i , allerdings sind die Punkte nicht mehr unbedingt gleichverteilt. Da die Gleichverteilung die Entropie maximiert gilt deswegen aber trotzdem

$$H(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) \leq \log(|A_i|)$$

und somit

$$\log(|A|) \leq \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^d \log(|A_i|) \Leftrightarrow |A|^{d-1} \leq \prod_{i=1}^d |A_i|.$$

□

Abgabe bis zum 21.06.2021