Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 8

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. *Betrachten sie die bereits in der Vorlesung definierte "First passage percolation" auf $\mathbb{Z}^d$ mit Kantenmenge $E = (e_i)_{i\in I}$, wobei I die Kanten zwischen nächsten Nachbarn enthält, und die Kantengewichte unabhängige Zufallsvariablen*

$$X_i : \Omega \to [a,b],\ \mathbb{E}(X_i^2) \le \sigma^2,\ i \in I$$

mit $0 < a < b < \infty$ sind. Definiere für einen Pfad γ zwischen Vertizes x und y dann

$$l(\gamma) := \sum_{i\in I, e_i \subset \gamma} X_i$$

und die Zufallsvariable

$$Z(x,y) := \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ verbindet } x \text{ und } y\}.$$

Zeigen sie:

$$\operatorname{Var}(Z(x,y)) \le \sigma^2 \frac{b}{a} \|y-x\|_1 = \sigma^2 \frac{b}{a} \sum_{j=1}^{d} |y_i - x_i|$$

Beweis. Sei γ^* ein Pfad von x nach y, auf dem das Minimum angenommen wird. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$\operatorname{Var}(Z(x,y)) \le \sigma^2 \mathbb{E}\left(\#\{\text{Kanten im optimalen Pfad } \gamma^*\}\right).$$

Da alle $X_i \in [a,b]$ folgt außerdem, dass wenn γ_1 ein kürzester Pfad bezüglich der l^1-Metrik von x zu y ist

$$\begin{aligned} a\cdot\#\{\text{Kanten im optimalen Pfad } \gamma^*\} &\le l(\gamma^*) = \sum_{i\in I, e_i\subset\gamma^*} X_i \\ &\le \sum_{i\in I, e_i\subset\gamma_1} X_i \le b\cdot\#\{\text{Kanten im kürzesten Pfad } \gamma_1\} \end{aligned}$$

sodass

$$\operatorname{Var}(Z(x,y)) \le \sigma^2 \frac{b}{a} \#\{\text{Kanten im kürzesten Pfad } \gamma_1\} = \sigma^2 \frac{b}{a} \|y-x\|_1$$

da auf $\mathbb{Z}^d$ jeder kürzeste Pfad von x zu y bezüglich der l^1-Metrik genau $\|y-x\|_1$ viele Kanten enthält. □

Übung 2. *Wir betrachten einen Erdös-Rény-Graphen $G \in \mathcal{G}(n,p)$, d.h. im vollständigen Graphen vom Grad n (Knotenmenge $V = \{1,\dots,n\}$; je zwei Knoten durch eine Kante verbunden) werden Kanten mit Wahrscheinlichkeit p beibehalten und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ gelöscht.*

Die zum Erdös-Rény-Graphen $G =: (V, E)$ zugehörige Adjazenzmatrix *ist die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, wobei*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn die Kante } (i,j) \text{ in } E \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezeichne $\lambda_1(A)$ den größten Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\left[\lambda_1(A)\right] \geq (n-1)p.$$

Beweis. Es gilt (da A symmetrisch):

$$\mathbb{E}(\lambda_1(A)) = \mathbb{E} \sup_{\|u\|=1} \langle u, Au \rangle .$$

Wir wählen ein bestimmtes u, nämlich $u = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$ und finden

$$\cdots \geq \frac{1}{n} \mathbb{E} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}.$$

Da $a_{ii} = 0$ (keine Kante von i nach i) und $a_{ij} = a_{ji}$, finden wir

$$\cdots = \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \neq n} \mathbb{E} a_{ij} = \frac{2n(n-1)p}{2n} = (n-1)p.$$

□

Übung 3. *Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{P}(X_i = k) = p_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. In der Vorlesung hatten wir die Anzahl verschiedener Werte in der Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ definiert als*

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \neq X_1, \ldots, X_i \neq X_{i-1}\}}$$

und deren Erwartungswert berechnet als

$$\mathbb{E}[Z(n)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_k)^{i-1} p_k.$$

Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z(n)]/n = 0$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $K_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=K_0+1}^{\infty} p_k \leq \epsilon/2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(n)] &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_0} (1-p_k)^{i-1} p_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=K_0+1}^{\infty} (1-p_k)^{i-1} p_k \leq \sum_{k=1}^{K_0} \sum_{i=1}^{n} (1-p_k)^{i-1} p_k + \frac{n\epsilon}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{K_0} 1 - (1-p_k)^n + \frac{n\epsilon}{2} \leq K_0 + \frac{n\epsilon}{2} \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile durch Anwendung der geometrischen Reihe folgt.
Für $n \geq 2K_0/\epsilon$ ist dann

$$\frac{\mathbb{E}[Z(n)]}{n} \leq \epsilon.$$

□

Übung 4. *Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen, die gemäß $\mathbb{P}$ verteilt sind. Das* empirische Wahrscheinlichkeitsmaß *P_n ist definiert durch*

$$P_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \in A\}},$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$). Wir haben gelernt, dass der Satz von Glivenko-Cantelli impliziert, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |P_n((-\infty,t]) - \mathbb{P}((-\infty,t])| \geq \epsilon\right) = 0$$

und fragen uns nun, ob das Supremum über das Mengensystem $\{(-\infty,t] : t \in \mathbb{R}\}$ durch ein Supremum über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ersetzt werden kann. Genauer gesagt fragen wir uns, ob

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |P_n(A) - \mathbb{P}(A)| \geq \epsilon) = 0 \tag{1}$$

für alle $\epsilon > 0$ gelten kann.

a) Zeigen Sie, dass (1) *im Allgemeinen nicht gilt.*

b) Finden Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, für das (1) *gilt.*

Beweis. a) Sei $\mathbb{P}$ eine stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß (z.B. $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$). Für jedes $\omega \in \Omega$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n(\omega) := \{X_1(\omega) \cup \cdots \cup X_n(\omega)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da $P_n(A_n(\omega)) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$, aber aufgrund der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ gleichzeitig $\mathbb{P}(B) = 0$ für alle Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $|B| < \infty$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |P_n(A) - \mathbb{P}(A)| \geq 1\right) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit kann (1) nicht gelten.

b) Sei $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = 1/2$. Dann ist für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_{\{1\in A\}} + \mathbb{1}_{\{0\in A\}})$$

und

$$P_n(A) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{\{1\in A\}} + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\mathbb{1}_{\{0\in A\}}\right).$$

Damit

$$\begin{aligned}|P_n(A) - P(A)| &\leq \left|\mathbb{1}_{\{1\in A\}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\mathbb{1}_{\{0\in A\}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1-X_i}{n} - \frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} - \frac{1}{2}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1-X_i}{n} - \frac{1}{2}\right| = 2\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} - \frac{1}{2}\right|\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Damit ist

$$\mathbb{P}\left(\sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |P_n(A) - \mathbb{P}(A)| \geq \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon/2\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\sum_i X_i)}{n^2\epsilon^2/4} = \frac{n/4}{n^2\epsilon^2/4} \to 0 \tag{2}$$

für $n \to \infty$ wobei wir Tschebytscheff verwendet haben.

$\square$

Abgabe bis zum 14.06.2021