Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 6

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. *(8 Punkte)*
Zeigen sie:

i) Sind $X_i,\ i \in [n]$ reellwertige, negativ assoziierte Zufallsvariablen und $f_j,\ j \in [k]$ isotone, nichtnegative Funktionen, die jeweils auf $\mathbb{R}^{D_j}$ definiert sind, wobei die D_j jeweils disjunkte Teilmengen von $[n]$ sind, so gilt

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\in[k]} f_j\left(X_i,\ i \in D_j\right)\right) \leq \prod_{j\in[k]} \mathbb{E}\left(f_j\left(X_i,\ i \in D_j\right)\right)$$

ii) Sind $X_i,\ i \in [n]$ reelwertige, negativ assoziierte Zufallsvariablen und sind $f_j,\ j \in [k]$ alle isoton oder alle antiton, jeweils wieder auf $\mathbb{R}^{D_j}$ definiert, wobei die D_j jeweils disjunkte Teilmengen von $[n]$ sind, so sind die Zufallsvariablen $Y_j := f_j\left(X_i,\ i \in D_j\right)$ negativ assoziiert.

iii) Sind $X_i,\ i \in [n]$ reelwertige, negativ assoziierte Zufallsvariablen und $Z_i,\ i \in [m]$ reelwertige, negativ assoziierte Zufallsvariablen sowie $X_i,\ i \in [n]$ unabhängig von Z_i, $i \in [m]$, so ist die Familie $X_1, \ldots, X_n, Z_1, \ldots, Z_m$ negativ assoziiert.
Tipp: Betrachten sie bedingte Erwartungswerte bedingt auf $Z_i,\ i \in [m]$!

iv) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen, die entweder den Wert 0 oder 1 annehmen können und für die gilt, dass immer $\sum\limits_{i\in[n]} X_i \leq 1$. Dann sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ negativ assoziiert.

v) Betrachten sie ein Urnen-und-Kugeln-Modell mit n Urnen und m Kugeln, bei dem jede Kugel b unabhängig von allen anderen Kugeln mit Wahrscheinlichkeit $p_{b,i}$ in Urne i gelegt wird. Sei B_i die Anzahl an Kugeln, die in Urne i gelegt wird. Dann sind $B_1, \cdots B_n$ negativ assoziiert.
Tipp: Nutzen sie die vorherigen Ergebnisse!

Beweis. i) Beweis über Induktion in k. Der Fall $k = 1$ ist klar, der Fall $k = 2$ folgt aus der Definition von negativ assoziierten Zufallsvariablen.
Die Induktionsvoraussetzung ist nun, dass die Behauptung für $k = n-1$ gilt. Betrachte nun $\prod\limits_{j\in[n-1]} f_j\left(X_i,\ i \in D_j\right)$. Dies ist eine Funktion, die nur von $X_i,\ i \in \bigcup\limits_{j\in[n-1]} D_j$ abhängt und nach Definition der f_j gilt $\left(\bigcup\limits_{j\in[n-1]} D_j\right) \cap D_n = \emptyset$. Weiterhin ist $\prod\limits_{j\in[n-1]} f_j\left(X_i,\ i \in D_j\right) \geq 0$, da alle $f_j \geq 0$, und isoton in allen Koordinaten $i \in \bigcup\limits_{j\in[n-1]} D_j$, da eine Vergrößerung jeder dieser Koordinaten eine Vergrößerung des zugehörigen f_j verursacht, was wiederum das Produkt vergrößert, da alle f_j nichtnegativ sind. Somit ist $\prod\limits_{j\in[n-1]} f_j\left(X_i,\ i \in D_j\right)$ selbst isoton, nichtnegativ und auf einer

disjunkten Teilmenge der X_i zu f_n definiert. Somit folgt aus der Aussage für $n = 2$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{j\in[n]} f_j\left(X_i,\ i\in D_j\right)\right) &\leq \mathbb{E}\left(\prod_{j\in[n-1]} f_j\left(X_i,\ i\in D_j\right)\right)\mathbb{E}\left(f_n\left(X_i,\ i\in D_n\right)\right)\\ &\leq \prod_{j\in[n]} \mathbb{E}\left(f_j\left(X_i,\ i\in D_j\right)\right)\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung.

ii) Wir müssen zeigen, dass falls $I, J \subset [k]$ disjunkt sind und $g : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ isoton sind, so folgt

$$\mathbb{E}\left(g(Y_I)h(Y_J)\right) \leq \mathbb{E}(g(Y_I))\mathbb{E}(h(Y_J)).$$

Da alle f_j entweder isoton oder antiton sind, folgt dass auch

$$\begin{aligned}g' &:= g \circ (f_j)_{j\in I} : \mathbb{R}^{\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right)} \to \mathbb{R}\\ h' &:= h \circ (f_j)_{j\in J} : \mathbb{R}^{\left(\bigcup_{j\in J} D_j\right)} \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

beide isoton oder antiton und Funktionen von $X_{\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right)}$ bzw. $X_{\left(\bigcup_{j\in J} D_j\right)}$ sind. Aus $\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} D_j\right) = \emptyset$ und der negativen Assoziiertheit der X_i folgt direkt die Aussage falls g' und h' isoton sind. Der Fall dass g' und h' antiton sind folgt über Übergang zu $-h'$ und $-g'$. Damit sind insbesondere auch $(X_i - \mathbb{E}(X_i)),\ i \in [n]$ und $-X_i,\ i \in [n]$ negativ assoziiert.

iii) Seien zunächst $A_X, B_X \subset [n]$ disjunkt und $A_Z, B_Z \subset [m]$ disjunkt. Wir müssen nun zeigen, dass für alle isotonen Funktionen $g : \mathbb{R}^{A_X} \otimes \mathbb{R}^{A_Z} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^{B_X} \otimes \mathbb{R}^{B_Z} \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \cdot h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right) \leq \mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z})\right)\mathbb{E}\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right).$$

Dazu wollen wir zunächst die bedingten Erwartungswerte bedingt auf $Z := (Z_i)_{i\in[m]}$ betrachten. Da die Familie X unabhängig von Z ist, gilt

$$\mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \cdot h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z\right) = \mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \cdot h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right)$$

wobei $\mathbb{E}_X$ für den Erwartungswert nur über die Zufallsvariablen X_i steht. Da die X_i negativ assoziiert sind, gilt punktweise für jedes Z

$$\mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \cdot h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right) \leq \mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z})\right)\mathbb{E}_X\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right)$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \cdot h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \cdot h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z\right)\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \mid Z\right)\mathbb{E}_X\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z\right)\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \mid Z^{A_Z}\right)\mathbb{E}_X\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z^{B_Z}\right)\right)\end{aligned}$$

da g nicht von Z_{B_Z} abhängt und h nicht von Z_{A_Z}.
Die Funktionen

$$\begin{aligned} g'(Z^{A_Z}) &:= \mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \mid Z^{A_Z}\right) = \mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z})\right) \\ h'(Z^{B_Z}) &:= \mathbb{E}\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z^{B_Z}\right) = \mathbb{E}_X\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right) \end{aligned}$$

wiederum sind isoton in ihren Argumenten und da Z auch eine negativ assoziierte Familie ist folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\mathbb{E}_X\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \mid Z^{A_Z}\right)\mathbb{E}_X\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z^{B_Z}\right)) \leq \mathbb{E}\left(g'(Z^{A_Z})h'(Z^{B_Z})\right) \\ &\quad \leq \mathbb{E}(g'(Z^{A_Z})\mathbb{E}(h'(Z^{B_Z})) \\ &\quad = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z}) \mid Z^{A_Z}\right)\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z}) \mid Z^{B_Z}\right)\right) \\ &\quad = \mathbb{E}\left(g(X^{A_X}, Z^{A_Z})\right)\mathbb{E}\left(h(X^{B_X}, Z^{B_Z})\right). \end{aligned}$$

iv) Seien $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ wieder zwei isotone Funktionen, die auf disjunkten Teilmengen J und I von $[n]$ definiert sind. Wir betrachten zunächst die Funktionen $f'(x) := f(x) - f(0)$ und $g'(x) := g(x) - g(0)$ sodass $f'(0) = g'(0) = 0$. Da sicher $\sum\limits_{i \in [n]} X_i \leq 1$ gilt, ist immer maximal ein $X_i = 1$ und alle anderen 0. Daher ist immer entweder $f'(X^I) = 0$ oder $g'(X^J) = 0$ und somit

$$\mathbb{E}\left(f'(X^I)g'(X^J)\right) = 0 \leq \mathbb{E}\left(f'(X^I)\right)\mathbb{E}\left(g'(X^J)\right)$$

da f und g isoton. Einsetzen der Definitionen von f' und g' und ausmultiplizieren führt dann auf die entsprechende Gleichung für f und g.

v) Definiere

$$X_{b,i} := \begin{cases} 1 & \text{Kugel } b \text{ wird in Urne } i \text{ gelegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da jedes $X_{b,i}$ entweder 0 oder 1 ist und für ein b die Summe über alle i immer 1 ist, erfüllt jede Familie $X_{b,i},\ i \in [n]$ die Bedingungen aus Teil iv). Somit sind diese Familien negativ assoziiert. Da alle Kugeln unabhängig voneinander verteilt werden, können wir außerdem Teil iii) nutzen und alle Familien zu einer negativ assoziierten Familie $X_{b,i},\ i \in [n], b \in [m]$ vereinen. Zusätzlich sind die Funktionen $B_i = \sum\limits_{b \in [m]} X_{b,i}$ isoton und hängen jeweils von disjunkten Teilmengen von $\{i \in [n], b \in [m]\}$ ab, sodass wir Teil ii) nutzen können. Somit sind $B_1, \cdots B_n$ negativ assoziiert.

$\square$

Übung 2. *(4 Punkte)*
Seien $X_1, \ldots X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$ und $\mathbb{P}(X_i = -1) = (1 - p_i)$. Die Funktion $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ habe die beschränkte-Differenzen-Eigenschaft mit Konstanten $c_1, \ldots, c_n$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Var}(f(X_1, \ldots, X_n)) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i^2 p_i(1 - p_i).$$

Beweis. Definiere $Z = f(X_1, \dots, X_n)$. Efron-Stein liefert:

$$\operatorname{Var}(Z) \le \sum_{i=1}^{n} \inf_{Z_i} \mathbb{E}[(Z - Z_i)^2],$$

wobei das Infimum über alle $X^{(i)} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$-messbaren L^2-Zufallsvariablen läuft. Wir wählen:

$$Z_i = p_i f(X_1, \dots, 1, \dots, X_n) + (1 - p_i) f(X_1, \dots, -1, \dots, X_n) =: p_i f_1 + (1 - p_i) f_{-1}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[(Z - Z^{(i)})^2] &= p_i(f_1 - p_i f_1 - (1 - p_i) f_{-1})^2 + (1 - p_i)(f_{-1} - p_i f_1 - (1 - p_i) f_{-1})^2 \\ &\le p_i(1 - p_i)^2 c_i^2 + (1 - p_i) p_i^2 c_i^2 = p_i(1 - p_i) c_i^2.\end{aligned}$$

und nach Efron-Stein:

$$\operatorname{Var}(f(X_1, \dots, X_n)) \le \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i) c_i^2.$$

□

Übung 3. *(4 Punkte)*
Für n Zahlen $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ *sei* $g(x_1, \dots, x_n)$ *die minimale Anzahl von Teilmengen* $U_1, \dots, U_{g(x_1, \dots, x_n)}$ *von* $\{1, \dots, n\}$, *so dass*

- $\cup_l U_l = \{1, \dots, n\}$,
- $U_l \cap U_k = \emptyset$ *für alle* $l \neq k$ *und*
- $\sum_{i \in U_l} x_i \le 1$ *für alle* $i \in \{1, \dots, n\}$ *und* $l \in \{1, \dots, g(x_1, \dots, x_n)\}$.

a) Seien $X_1, \dots, X_n$ *unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in* $[0, 1]$. *Zeigen Sie*

$$\operatorname{Var}(g(X_1, \dots, X_n)) \le \frac{n}{4}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Abschätzung aus a) im Allgemeinen nicht verbessert werden kann, d.h. finden Sie Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_i$, *so dass*

$$\operatorname{Var}(g(X_1, \dots, X_n)) = \frac{n}{4}.$$

Beweis. a) Die Funktion g hat die beschränkte-Differenzen-Eigenschaft mit $c_i = 1$ für alle i, denn ändert man ein x_i, so kann man bestenfalls eine Teilmenge sparen und muss schlimmstenfalls eine neue Teilmenge aufmachen. Denn bei jeder Wahl von Teilmengen U_l mit minimaler Anzahl kann durch eine Veränderung von x_i höchstens die Summe über alle x_k einer Teilmenge U_l soweit verkleinert werden, dass sie in die anderen integriert werden kann, auf andere U_ls gibt es keinen Einfluss, und schlimmstenfalls muss eine neue Teilmenge nur für x_i gebildet werden. Nach Korollar 3.2 ist damit

$$\operatorname{Var}(g(X_1, \dots, X_n)) \le \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} 1^2 = \frac{n}{4}.$$

b) Wir wählen die X_i als Bernulli-Zufallsvariablen mit Parameter $1/2$, d.h. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 0) = 1/2$. Dann ist $g(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$, also $(n, 1/2)$-binomialverteilt. Insbesondere ist dann

$$\operatorname{Var}(g(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{n}{4}.$$

$\square$

Abgabe bis zum 31.05.2021