Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 5

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. *Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ monoton fallend und $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ monoton wachsend. Sei $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und X eine Zufallsvariable so dass*

$$\mathbb{E}[f(X)h(X)] \leq \mathbb{E}[h(X)] < \infty.$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)h(X)] \leq \mathbb{E}[g(X)h(X)].$$

Beweis. Ist $h(X) \equiv 0$, so ist nichts zu zeigen.

Sei also $h(X) \not\equiv 0$, weswegen auch $\mathbb{E}[h(X)] > 0$. Wende die Tschebytscheffsche Korrelationsungleichung (mit $Y := h(X)$) an:

$$\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[f(X)g(X)Y] \leq \mathbb{E}[Yf(X)]\mathbb{E}[Yg(X)].$$

Setze $Y := h(X)$ und teile durch $\mathbb{E}[Y]$:

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)h(X)] \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)h(X)]\mathbb{E}[g(X)h(X)]}{\mathbb{E}[h(X)]} \leq \mathbb{E}[g(X)h(X)],$$

wobei wir im letzten Schritt die Annahme verwendeten. $\square$

Übung 2. *Sei $G(n,p)$ wie in der Vorlesung definiert ein Ensemble von Erdős-Renyi-Graphen und $G \in G(n,p)$ ein zufälliger Erdős-Renyi-Graph. Weiterhin sei für jede Menge $A = \{(u,v),(v,w),(w,u)\}$ aus drei Kanten des vollständigen Graphen mit n Ecken, die zusammen ein Dreieck bilden, Y_A die Zufallsvariable, die angibt, ob alle Kanten in A in G aktiviert sind, $\mathcal{I}$ die Menge aller möglichen Mengen vom selben Typ wie A sowie $Z = \sum\limits_{A \in \mathcal{I}} Y_A$ die Anzahl an Dreiecken in G.*
Zeigen sie:

1.
$$\mathbb{E}(Z) = \binom{n}{3} p^3$$

2.
$$\operatorname{Var}(Z) = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}(p^5 - p^6)$$

3.
$$\Delta = \binom{n}{3}p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5$$

4.
$$\mathbb{P}(Z = 0) \leq \exp\left(-\frac{\binom{n}{3}p^3}{2(1 + 3np^2)}\right)$$

Beweis. 1.

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \mathbb{E}(Y_A) = \sum_{A \in \mathcal{I}} p^3 = \binom{n}{3} p^3$$

da alle Kanten unabhängig von einander sind und jede Wahl von drei von n Punkten ein eigenes Dreieck bildet.

2.

$$(\mathbb{E}(Z))^2 = \left(\sum_{A \in \mathcal{I}} \mathbb{E}(Y_A) \right)^2 = \sum_{A \in \mathcal{I}} \sum_{B \in \mathcal{I}} \mathbb{E}(Y_A)\mathbb{E}(Y_B)$$
$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{A \in \mathcal{I}} \sum_{B \in \mathcal{I}} \mathbb{E}(Y_A Y_B)$$

Ist $|A \cap B| = 0$, so haben beide Dreiecke keine gemeinsamen Kanten und es gilt $\mathbb{E}(Y_A Y_B) = \mathbb{E}(Y_A)\mathbb{E}(Y_B) = p^6$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Z) &= \sum_{A,B \in \mathcal{I}, |A \cap B| > 0} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_B) - p^6 \right) \\
&= \sum_{A,B \in \mathcal{I}, |A \cap B| = 2} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_B) - p^6 \right) + \sum_{A,B \in \mathcal{I}, |A \cap B| = 1} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_B) - p^6 \right) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{I}} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_A) - p^6 \right) + \sum_{A,B \in \mathcal{I}, |A \cap B| = 1} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_B) - p^6 \right) \\
&= \binom{n}{3} \left(p^3 - p^6 \right) + \sum_{A,B \in \mathcal{I}, |A \cap B| = 1} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_B) - p^6 \right)
\end{aligned}$$

da zwei gemeinsame Seiten schon bedeuten, dass es sich um das gleiche Dreieck handelt. Haben A und B eine Seite gemeinsam, so gilt immer $\mathbb{E}(Y_A Y_B) = p^5$. Somit muss nur noch geklärt werden, wie viele Möglichkeiten es gibt, im Graphen zwei Dreiecke zu wählen, die eine Seite gemeinsam haben. Jedem Paar (A, B) mit einer gemeinsamen Kante kann eine Menge (a, b, c, d) aus vier Eckpunkten zugeordnet werden, die die Ecken der beiden Dreiecke bilden. Allerdings können mehrere Kombinationen aus zwei Dreiecken die selben vier Ecken besitzen. Wie viele mögliche Kombinationen führen auf die selben Ecken? Zuerst können von allen vier Punkten immer zwei ausgewählt werden, deren Verbindungskante die gemeinsame Kante bilden soll, sodass $\binom{4}{2}$ mögliche Kombinationen von zwei Dreiecken díe vier Punkte erzeugen. Weiterhin kann jedes dieser Dreiecke entweder A oder B sein. Es gibt $\binom{n}{4}$ Sets aus 4 unterschiedlichen Punkten, sodass sich insgesamt $2\binom{n}{4}\binom{4}{2}$ Möglichkeiten zur Wahl der Dreiecke ergeben. Insgesamt folgt somit

$$\mathrm{Var}(Z) = \binom{n}{3} \left(p^3 - p^6 \right) + 2 \binom{n}{4} \binom{4}{2} \left(p^5 - p^6 \right)$$

3. Da

$$\Delta = \sum_{A,B \in \mathcal{I}, |A \cap B| \neq 0} \left(\mathbb{E}(Y_A Y_B) \right)$$

folgt aus der Rechnung zum letzten Punkt auch

$$\Delta = \binom{n}{3} p^3 + 2 \binom{n}{4} \binom{4}{2} p^5$$

4. Aus Jensen folgt

$$\mathbb{P}(Z=0) \leq \exp\left(-\frac{(\mathbb{E}(Z))^2}{2\Delta}\right) = \exp\left(-\frac{\binom{n}{3}^2 p^6}{2\left(\binom{n}{3}p^3 + 2\binom{n}{4}\binom{4}{2}p^5\right)}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\binom{n}{3}p^3}{2\left(1+2\frac{\binom{n}{4}\binom{4}{2}}{\binom{n}{3}}p^2\right)}\right).$$

Da

$$\frac{\binom{n}{4}\binom{4}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{n!}{4!\ (n-4)!}\cdot\frac{4!}{2!\ 2!}}{\frac{n!}{3!\ (n-3)!}} = \frac{6(n-3)!}{4(n-4)!} = \frac{6}{4}(n-3) \leq \frac{6}{4}n$$

folgt

$$\mathbb{P}(Z=0) \leq \exp\left(-\frac{\binom{n}{3}p^3}{2(1+3np^2)}\right)$$

□

Übung 3. *Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$. Wir bezeichnen mit $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x$ die Randdichte von Y und setzen für $y \in \mathbb{R}$:*

$$f_{X|Y=y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$, $f_{X|Y=y}$ Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Sei $X \in L^1(\Omega)$. Definieren Sie $\mathbb{E}[X \mid Y = y] := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\mathrm{d}x$ sowie

$$\mathbb{E}[X \mid Y](\omega) := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=Y(\omega)}\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass für jedes messbare $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[X\chi_A(Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]\chi_A(Y)].$$

c) Wie vereinfacht sich die Dichte $f_{X|Y=y}$, wenn X und Y unabhängig sind?

d) Zeigen Sie, dass für unabhängige X und Y die Zufallsvariable $\mathbb{E}[X \mid Y]$ konstant ist und berechnen Sie diese.

Beweis. a)
$$\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y=y}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x = 1.$$

b) Wir rechnen:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]\chi_A(Y)] = \int_{\mathbb{R}\times A}\int_{\mathbb{R}} \tilde{x}\frac{f(\tilde{x},y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}\tilde{x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}\times A} \tilde{x} f(\tilde{x},y)\frac{f_Y(y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}\tilde{x}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}\times A} x f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbb{E}[X\chi_A(Y)].$$

(Insbesondere rechtfertigt das zusammen mit Messbarkeit (die trivial ist, da f Dichte und alles sogar für alle y gilt), dass obige Definition von $\mathbb{E}[X \mid Y]$ tatsächlich eine Version der bedingten Erwartung liefert).

c) Im Fall der Unabhängigkeit faktorisiert $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$. Dementsprechend

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{g(x)h(y)}{\int_{\mathbb{R}} g(x)h(y)\mathrm{d}x} = \frac{g(x)h(y)}{1 \cdot h(y)} = g(x)$$

d)

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot g(x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}[X].$$

□

Übung 4. *Seien X_1,...,X_n unabhängige reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω und A und B messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in B),$$

und der Eigenschaft, dass wenn $(x_1, \ldots, x_n)$ in A bzw. B liegt und $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \tilde{x}_i \geq x_i$ auch $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ in A bzw. B liegt (sogenannte wachsende Ereignisse). Zeigen sie den "Wurzeltrick"

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A) \geq 1 - \sqrt{1 - \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in (A \cup B))}$$

Beweis. Wir können zunächst für A und B die Funktionen f_A und f_B definieren als

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}, f_A(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} 1, & (x_1, \ldots, x_n) \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und analog für f_B. Da A und B wachsende Ereignisse sind, sind f_A und f_B n-isoton. Aus der Harris-Ungleichung folgt somit

$$\mathbb{E}(f_A(X_1, \ldots, X_n)f_B(X_1, \ldots, X_n)) \geq \mathbb{E}(f_A(X_1, \ldots, X_n))\mathbb{E}(f_B(X_1, \ldots, X_n)).$$

Weiterhin ist $f_A(X_1, \ldots, X_n)$ gerade die Indikatorfunktion des Ereignis $\{(X_1, \ldots, X_n) \in A\}$, sodass $\mathbb{E}(f_A(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A)$ und ebenso für B. Im Rest des Beweises schreiben wir jetzt kurz $\mathbb{P}(A)$ für $\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A)$ und ebenso für $B, A \cap B$ und $A \cup B$. Daraus folgt außerdem $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}(f_A(X_1, \ldots, X_n)f_B(X_1, \ldots, X_n))$, also insgesamt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{E}(f_A(X_1, \ldots, X_n)f_B(X_1, \ldots, X_n)) \\ &\geq \mathbb{E}(f_A(X_1, \ldots, X_n))\mathbb{E}(f_B(X_1, \ldots, X_n)) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (\mathbb{P}(A))^2. \end{aligned}$$

Es gilt weiterhin

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned} 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cup B) &\geq (\mathbb{P}(A))^2 \\ 1 - \mathbb{P}(A \cup B) &\geq 1 - 2\mathbb{P}(A) + (\mathbb{P}(A))^2 \\ 1 - \mathbb{P}(A \cup B) &\geq (1 - \mathbb{P}(A))^2 \\ \sqrt{1 - \mathbb{P}(A \cup B)} &\geq 1 - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(A) &\geq 1 - \sqrt{1 - \mathbb{P}(A \cup B)} \end{aligned}$$

□

Abgabe bis zum 24.05.2021