Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 3

TU Dortmund, Sommersemester 2021

Prof. Dr. Ivan Veselić

Übung 1. *Beweisen Sie folgende Ungleichungen*

$$(1+u)\ln(1+u) - u \geq \frac{u^2}{2(1+u/3)}, \quad \textit{für } u > 0. \tag{1}$$

$$1 + u - \sqrt{1+2u} \geq \frac{u^2}{2(1+u)}, \quad \textit{für } u > 0. \tag{2}$$

Beweis.

- Zu Ungleichung (1): Es gilt

$$\int_0^{1+u} \ln(x)\mathrm{d}x = (u+1)\ln(u+1) - u - 1.$$

Daher ist (1) äquivalent zu

$$\int_0^{u+1} \ln(x)\mathrm{d}x + 1 \geq \frac{u^2}{2(1+u/3)}.$$

Für $u = 0$ ist das $0 \geq 0$. Es reicht also zu zeigen, dass die Ableitung auf der rechten Seite immer kleiner ist als die auf der linken, also

$$\ln(u+1) \geq \frac{3u(u+6)}{2(u+3)^2}.$$

Für $u = 0$ gilt wieder $0 \geq 0$. Wir können also noch einmal ableiten und erhalten

$$\frac{1}{u+1} \geq \frac{27}{(u+3)^3}.$$

Das stimmt für alle $u > 0$.

- Zu Ungleichung 2: Wir schreiben die Ungleichung um zu

$$1 + u - \frac{u^2}{2(1+u)} = \frac{2+4u+u^2}{2(1+u)} \geq \sqrt{1+2u}.$$

Beide Seiten sind positiv, also ist die Ungleichung genau dann korrekt wenn sie für die Quadrate beider Seiten gilt:

$$\frac{(2+4u+u^2)^2}{4(1+u)^2} \geq 1 + 2u$$

oder

$$(2+4u+u^2)^2 = u^4 + 8u^3 + 20u^3 + 16u + 4 \geq 4(1+2u)(1+u)^2 = 8u^3 + 20u^2 + 16u + 4$$

oder

$$u^4 \geq 0.$$

□

Übung 2. *In der Vorlesung war die kumulantenerzeugende Funktion ψ_X der Zufallsvariable $X = Y - \mathbb{E}[Y]$, wobei Y eine gammaverteilte Zufallsvariable mit Parametern $a, b \geq 0$ war, berechnet und abgeschätzt worden als*

$$\psi_X(\lambda) = a(-\lambda b - \ln(1-\lambda b)) \leq \frac{\lambda^2 \nu}{2(1-c\lambda)} \quad \textit{für } \lambda \in (0, 1/c),$$

wobei $\nu = ab^2$ und $c = b$.

a) *Zeigen Sie:*

$$\sup_{\lambda \in (0,1/c)} \left(t\lambda - \frac{\lambda^2 \nu}{2(1-c\lambda)} \right) = \frac{\nu}{c^2} h_1 \left(\frac{ct}{\nu} \right),$$

wobei

$$h_1(u) = 1 + u - \sqrt{1+2u}.$$

b) *Zeigen Sie: $h_1(\lambda)\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ ist strikt monoton wachsend und bijektiv.*

c) *Berechnen Sie die Inverse h_1^{-1} (oder rechnen Sie nach, dass die in der Vorlesung angegebene Funktion tatsächlich die Inverse ist).*

Beweis. a) Wir bilden zuerst die Ableitung von $t\lambda - \frac{\lambda^2\nu}{2(1-c\lambda)}$ und setzen gleich 0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(t\lambda - \frac{\lambda^2 \nu}{2(1-c\lambda)} \right) = t - \frac{2\lambda\nu \cdot 2(1-c\lambda) - \lambda^2\nu(-2c)}{4(1-c\lambda)^2} \overset{!}{=} 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 4(1-c\lambda_t)^2 t &= 4\lambda_t \nu(1-c\lambda_t) + 2\lambda_t^2 \nu c \\ \Leftrightarrow 0 &= \lambda_t^2 - \frac{2}{c}\lambda_t + \frac{2t}{c\nu + 2c^2 t} \\ \Leftrightarrow \lambda_t &= \frac{1}{c} - \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{2t}{c\nu + 2c^2 t}} = \frac{1}{c} - \sqrt{\frac{\nu}{2c^3 t + c^2 \nu}} \end{aligned}$$

da $\lambda_t < \frac{1}{c}$ gelten muss. Eingesetzt folgt somit

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda \in (0,1/c)} \left(t\lambda - \frac{\lambda^2 \nu}{2(1-c\lambda)} \right) = \frac{t}{c} - t\sqrt{\frac{\nu}{2c^3 t + c^2 \nu}} - \frac{\left(\frac{1}{c} - \sqrt{\frac{\nu}{2c^3 t + c^2 \nu}} \right)^2 \nu}{2\left(1 - c\left(\frac{1}{c} - \sqrt{\frac{\nu}{2c^3 t + c^2\nu}}\right)\right)} \\ &= \frac{\nu}{c^2} + \frac{t}{c} - \frac{\frac{t}{c}\left(\frac{\nu}{2ct+\nu}\right) + \frac{\nu}{2c^2}\left(1 + \frac{\nu}{2ct+\nu}\right)}{\sqrt{\frac{\nu}{2ct+\nu}}} \\ &= \frac{\nu}{c^2} + \frac{t}{c} - \frac{\nu}{c^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu}{2ct+\nu}}} = \frac{\nu}{c^2}\left(1 + \frac{ct}{\nu} - \sqrt{\frac{2ct+\nu}{\nu}}\right) = \frac{\nu}{c^2} h_1\left(\frac{ct}{\nu}\right). \end{aligned}$$

b) Da h_1 aus differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt ist, bilden wir die Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} h_1(\lambda) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 0$$

da $\lambda > 0$. Somit ist h_1 strikt monoton wachsend und injektiv. Da $\lim_{\lambda\to 0} h_1(\lambda) = 0$ und $h_1' \nearrow 1$ falls $\lambda \to \infty$ ist h_1 außerdem nicht beschränkt und aufgrund der Stetigkeit somit auch surjektiv.

c) In der Vorlesung wurde $h_1^{-1}(u) = u + \sqrt{2u}$ behauptet. Da h_1 bijektiv ist, müssen wir nur $h_1\left(h_1^{-1}(x)\right) = x$ zeigen. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1\left(h_1^{-1}(x)\right) - x &= 1 + x + \sqrt{2x} - \sqrt{1 + 2(x + \sqrt{x})} - x \\ &= 1 + \sqrt{2x} - \sqrt{1 + 2x + 2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Dies wird übersichtlicher mit der Substitution $t = \sqrt{2x}$ sodass $x = \frac{t^2}{2}$. Damit gilt

$$h_1\left(h_1^{-1}(x)\right) - x = 1 + t - \sqrt{1 + t^2 + 2t} = 1 + t - \sqrt{(1+t)^2} = 0$$

$\square$

Übung 3. *Sei* $\phi(u) := \mathrm{e}^u - u - 1$.

a) Zeigen Sie $\phi(u) \leq u^2/2$ *für* $u < 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \begin{cases} u^{-2}\phi(u), & u \neq 0, \\ 1/2, & u = 0, \end{cases}$$

isoton ist.

c) In der Vorlesung war für unabhängige Zufallsvariablen mit endlicher Varianz und welche fast sicher Werte im Intervall $(-\infty, b]$ *annehmen, aus der Bennett-Ungleichung eine Variante der Bernstein-Ungleichung*

$$\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(\nu + bt/3)}\right) \tag{3}$$

hergeleitet worden, wobei

$$S := \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_i] \quad \textit{und} \quad \nu = \mathrm{Var}(S).$$

Leiten Sie die Ungleichung (3) *nun direkt aus Satz 2.22 (allgemeinere Form der Bernstein-Ungleichung), bzw. aus Korollar 2.23 her.*

Beweis. a) Äquivalent zu

$$\mathrm{e}^{-u} \leq 1 - u + u^2/2 \quad \text{for } u \geq 0.$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

$$-\mathrm{e}^{-u} \leq u - 1 \Leftrightarrow 1 \leq u + \mathrm{e}^{-u}$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

$$0 \leq 1 - \mathrm{e}^{-u}$$

Das ist offensichtlich wahr.

b) Die Funktion lässt sich als Potenzreihe entwickeln:

$$f(u) := u^{-2}\phi(u) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{u^q}{(q+2)!}.$$

Diese konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$, also ist die Funktion C^∞ und es genügt zu zeigen, dass $f' \geq 0$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es ist

$$f'(u) = \frac{\mathrm{e}^u(u-2)+u+2}{u^3}.$$

- Ist $u > 0$, so müssen wir zeigen:

$$\mathrm{e}^u(u-2)+u+2 \geq 0.$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

$$\mathrm{e}^u(u-2)+\mathrm{e}^u+1 \geq 0.$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere

$$\mathrm{e}^u(u-2)+2\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u u \geq 0.$$

Das ist wahr für alle $u > 0$.

- Ist $u < 0$, so ist zu zeigen:

$$\mathrm{e}^u(u-2)+u+2 \leq 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\mathrm{e}^{-u}(-u-2)-u+2 \leq 0 \quad \forall u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-u \leq \mathrm{e}^{-u}(u+2) \quad \forall u > 0.$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

$$-1 \leq -\mathrm{e}^{-u}(u+2)+\mathrm{e}^{-u} = -\mathrm{e}^{-u}(u+1).$$

Das ist wieder wahr für $u = 0$. Erneutes differentieren liefert

$$0 \leq \mathrm{e}^{-u}(u+1)-\mathrm{e}^{-u} = u\mathrm{e}^{-u}.$$

Das ist wahr für alle $u > 0$.

c) Sei $X_i \leq b$ fast sicher. Wir wollen die Bedingungen aus Thm. 2.22 nachrechnen. Offenbar ist $\sum_i \mathbb{E}[X_i]^2 = \mathrm{Var}(S) = \nu \leq \nu$. Gilt

$$\mathbb{E}[(X_i)_+^q] \leq \frac{q!}{2}\nu c^{q-2} \quad \forall q \geq 3,$$

so folgt (mit Korollar 2.21)

$$\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{2\nu+ct}\right)$$

Wir müssen also zeigen:

$$\mathbb{E}[(X_i)_+^q] \leq \frac{q!}{2}\nu(b/3)^{q-2} \quad \forall q \geq 3.$$

Nun ist

$$\mathbb{E}[(X_i)_+^q] \leq b^{q-2}\mathbb{E}[(X_i)^2] \leq \frac{3^{q-2}}{3^{q-2}}\nu b^{q-2} \leq \frac{q!}{2}\nu(b/3)^{q-2},$$

denn $3^{q-2} \leq q!/2$ für $q \geq 3$.

$\square$

Übung 4. *Sei X eine reele Zufallsvariable mit Verteilung*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(-x)^3} & x \leq -1 \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$

a) Berechnen sie $\mathbb{E}(X)$

b) Zeigen sie, dass $M_X(\lambda) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X-\mathbb{E}(X))}\right)$ und $\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}M_X(\lambda)$für alle $\lambda > 0$ existieren, aber $\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}M_X(\lambda) = \infty$.

Beweis. a)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{2x}{(-x)^3}\mathrm{dx} = -2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{dx} = -2$$

b) Die momentenerzeugende Funktion ist beschränkt, da

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X+2)}\right) = \mathrm{e}^{2\lambda}\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{\lambda x}\frac{2}{(-x)^3}\mathrm{dx} = 2\mathrm{e}^{2\lambda}\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x^3}\mathrm{dx} \leq 2\mathrm{e}^{2\lambda}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{dx} < \infty.$$

Da $\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x^3}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x^2} \leq \mathrm{e}^{-\lambda x}$ und $\left|\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x^3}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x} \leq \mathrm{e}^{-\lambda x}$ für $x \in [1,\infty)$ gilt, existiert eine integrierbare Majorante und es folgt für $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}M_X(\lambda)\right| &= \left|8\mathrm{e}^{2\lambda}\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x^3}\mathrm{dx} - 8\mathrm{e}^{2\lambda}\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x^2}\mathrm{dx} + 2\mathrm{e}^{2\lambda}\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\mathrm{dx}\right| \\ &\leq 18\mathrm{e}^{2\lambda}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{dx} < \infty.\end{aligned}$$

Die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite sind betragsmäßig kleiner als $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\mathrm{dx} < \infty$ für alle $\lambda \geq 0$ mit $p = 2, 3$. Um den Übergang $\lambda \to 0$ beim letzten Integral zu betrachten nutzen wir die Substitution $y = \lambda x$ sodass für $\lambda < \ln(2)$ folgt:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\mathrm{dx} = \int_\lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{dy} \geq \int_\lambda^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{dy} \geq \int_\lambda^{\ln 2} \frac{1}{2y}\mathrm{dy} = \frac{1}{2}[\ln(\ln(2)) - \ln(\lambda)] \nearrow \infty$$

für $\lambda \to 0$.

$\square$

Abgabe bis zum 10.05.2021