

Hintergrund Diskussion zur Frage vom Mi.,

21 / 4 / 2021

- Für welche Werte von t ist die Cramer Transformierte definiert?
- Wie kann man sich die Fkt.
 $t \mapsto \psi^*(t)$
(geometrisch) vorstellen?

Dabei nehmen wir durchgängig

- $z \in L^1$ • ~~$\exists z = 0$~~ • $\exists \lambda > 0 : M_z(\lambda) < \infty$
an.

$$t \geq 0 \in \mathbb{R}$$

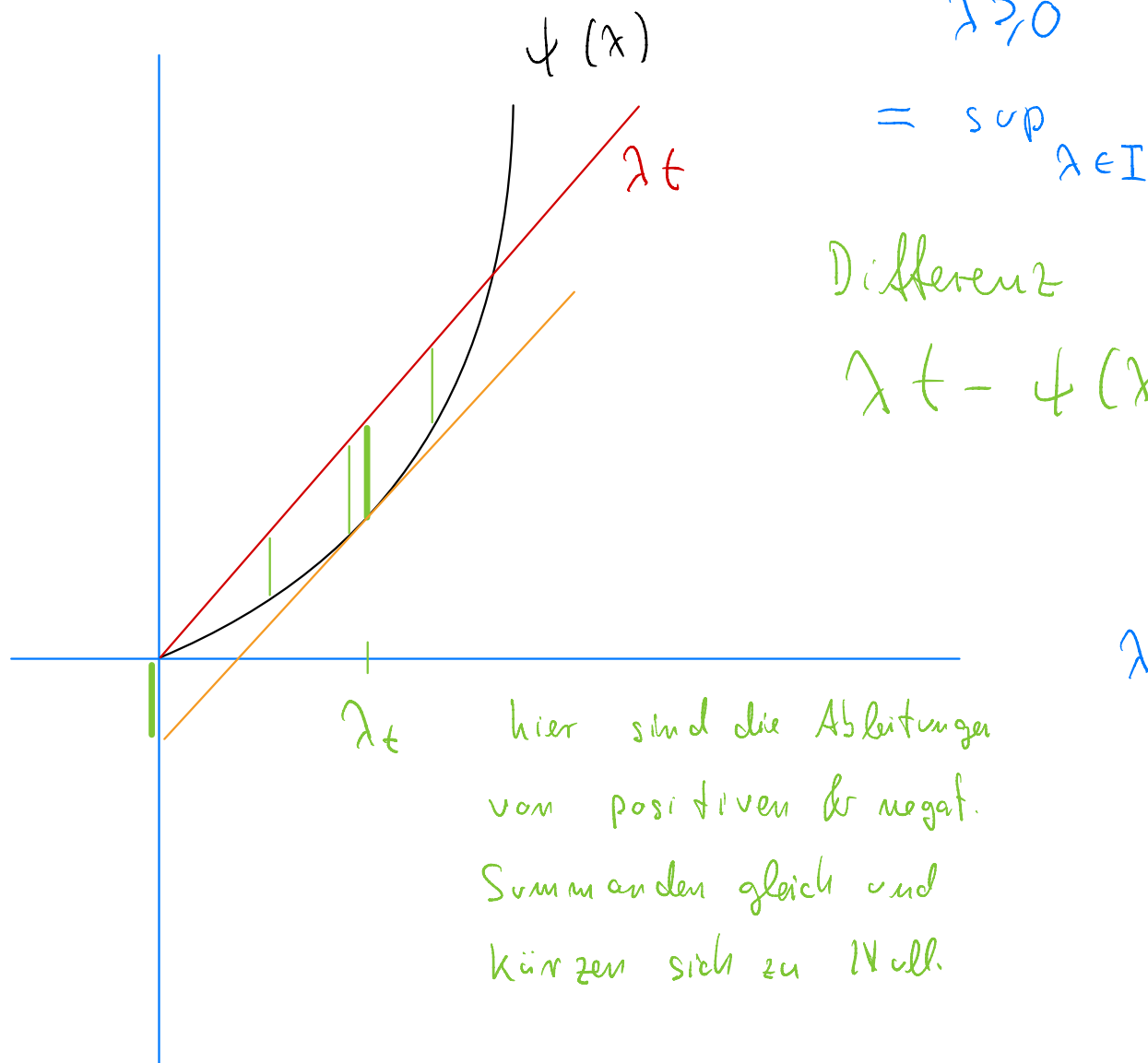
$$\psi^*(t) = \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda t - \psi(\lambda))$$

$$\lambda \geq 0$$

$$= \sup_{\lambda \in I} (\lambda t - \psi(\lambda))$$

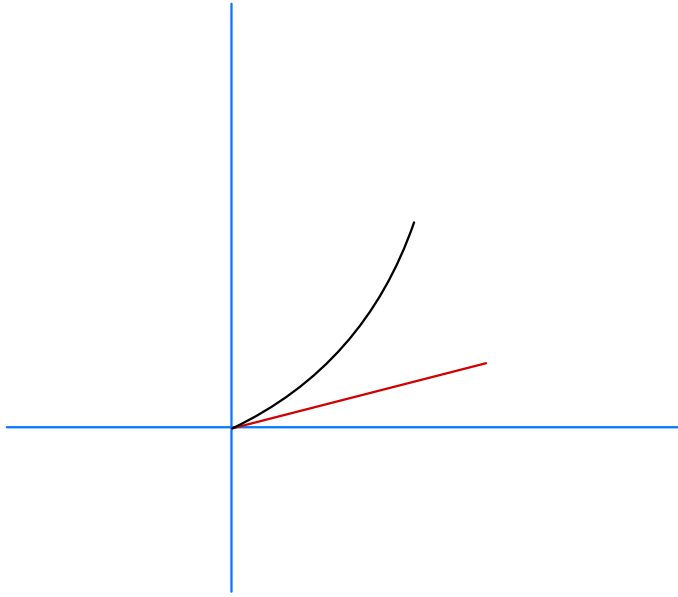
Differenz

$$\lambda t - \psi(\lambda)$$



Fazit : $\psi^*(t)$ ist die Länge des
y-Achsen - Abschnitts vom Ursprung
zur Schnitstelle mit Tangente
mit Steigung t an Graph von
 $\lambda \mapsto \psi(\lambda)$

Frage : kann folgende Situation vorkommen:



Nicht in der Situation :

$$t > E(Z)$$

denn es gilt

$$\psi'(0) = M'(0) = E(Z) < t$$

also ist die Steigung von ψ
in 0 kleiner als die Steigung
von $\lambda \mapsto \lambda t$.

$$\Rightarrow \psi^*(t) > 0$$

Es bleibt also noch der Fall $t = E(Z)$ zu besprechen:

$$\psi^*(E Z) = \sup_{\lambda \geq 0} (\underbrace{\lambda E Z - \psi(\lambda)}_{\leq 0 \text{ Jensen}}) = 0$$

Fazit: Unter unseren Vorass.

ist $t \mapsto \psi^*(t)$

wohl definiert für $t \in [E Z, \infty)$

und $\psi([E Z, \infty)) \subset [0, \infty)$

Falls Z nicht a.s. konstant ist,

da ja dann ψ strikt konvex.

Gilt $Z = EZ$ f.s. so ist

$\psi(\lambda) = EZ \cdot \lambda$ und somit

$$\psi^*(t) = \sup_{\lambda \geq 0} \left(\underbrace{(t - EZ)}_{\geq 0} \lambda \right) = +\infty$$

für $t > EZ$ und $\psi^*(EZ) = 0$.

$$\text{Also } \psi^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = EZ \\ \infty & t > EZ \end{cases}$$

Wie wir schon besprochen haben, ist es kein Verlust, dass wir $\psi(t)$ nicht für $t < 0$ definieren, da ja zunächst Z zentriert, die Relation $P(Z < -t) = P(-Z > t)$ genutzt werden kann und $-Z$ selbe Regularität wie Z hat.