4. Grenzwertsätze

Schon das Gesetz der großen Zahlen kann man als einen Grenzwertsatz auffassen. Allerdings war dort der Grenzwert ein Skalar, also eine ziemlich simple Größe. Man möchte aber auch die Konvergenz gegen kompliziertere Größen, z.B. eine Verteilung oder eine Dichte beschreiben können. Dazu müssen wir zunächst einiges analytisches Werkzeug bereitstellen. Insbesondere sind charakteristische und momentenerzeugende Funktionen ein nützliches Hilfsmittel.

4.1. Charakteristische und momentenerzeugende Funktionen

4.1.1 Definition: *Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}$. Dann heißt*

$$M = M_\mu \colon \mathbb{R} \to (0, \infty], \qquad M(t) := \int \mathrm{e}^{tx} \mu(\mathrm{dx})$$

momentenerzeugende Funktion von μ. *Die Funktion ist für alle Werte von t wohldefiniert, auch wenn sie den Wert $+\infty$ annehmen kann. Falls das Maß μ endlich ist, so ist die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{itx}$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$. Dann heißt*

$$\phi = \phi_\mu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx} \mu(\mathrm{dx})$$

charakteristische Funktion von μ. *Falls μ die Verteilung einer Zufallsvariable $X \colon (\Omega, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ ist, so gelten*

$$M_\mu(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}), \qquad \phi_\mu(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}).$$

Man schreibt

$$M_X := M_\mu, \qquad \phi_X := \phi_\mu$$

und spricht von momentenerzeugender bzw. charakteristischer Funktion von X.

4.1.2 Bemerkung (Rechenregeln)**:** Nachrechnen als Aufgabe

1) Seien $X, Y \colon (\Omega, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) \text{ und } \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

   Insbesondere erhalten wir folgenden Spezialfall.

2) Für alle $a, b, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$M_{aX+b}(t) = \mathrm{e}^{bt} M_X(at) \text{ und } \phi_{aX+b}(t) = \mathrm{e}^{ibt}\phi_X(at).$$

3) Offensichtlich gilt

$$M_\mu(0) = \phi_\mu(0) = \mu(\mathbb{R}).$$

   Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so gilt

$$M_\mu(0) = 1.$$

4) Außerdem gilt $\phi_\mu(-t) = \overline{\phi_\mu(t)}$.

4.1.3 Bemerkung: 1) Analoges gilt auch für Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariablen.

2) ϕ_μ ist die Fouriertransformierte des Maßes μ. Ist $\mu = f\lambda$ absolutstetig bezüglich des Lebesguemaßes mit Dichte f, dann ist $\phi_\mu = \phi_{f\lambda}$ die Fouriertransformierte von f:

$$\phi(t) = \int \mathrm{e}^{itx} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Analog ist

$$M(-t) = \int \mathrm{e}^{-tx} \mu(\mathrm{d}x) \quad (t > 0)$$

die Laplacetransformierte des Maßes μ. Im absolutstetigen Fall $\mu = f\lambda$ ist die Laplacetransformierte von f:

$$M(-t) = \int \mathrm{e}^{-tx} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

3) Gilt $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ und $M(s) < \infty$ für ein $s > 0$ (bzw. $s < 0$), so nimmt die Einschränkung $M|_{[0,s]}$ (bzw. $M|_{[s,0]}$) nur endliche Werte an. Denn $x \mapsto x^{\frac{t}{s}}$ ist konkav für $\frac{t}{s} \leq 1$ und nach der Jensen-Ungleichung ist

$$M(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \mathbb{E}(\mathrm{e}^{sX})^{\frac{t}{s}} < \infty,$$

falls μ Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. (Ansonsten muss man μ normieren.)

4) Falls ein $\delta > 0$ existiert mit M endlich auf $(-\delta, \delta)$, so ist M analytisch fortsetzbar auf Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid |Re(z)| < \delta\}$ in der komplexen Ebene und es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi(t) = M(it).$$

Der Zusammenhang zwischen M und ϕ nützt manchmal zur Berechnung der charakteristischen Funktion.

4.1.4 Beispiel: (1) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ standardnormalverteilt. Dann gilt für beliebige $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx - \frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} < \infty.$$

quadratische Ergänzung Also gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_X(t) = M_X(it) = \mathrm{e}^{\frac{(it)^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

(2) Sei X normalverteilt mit $\mathbb{E}(X) = m$ und $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 > 0$. Dann ist X darstellbar als $X = \sigma Y + m$, wobei $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Also gilt

$$M_X(t) = M_{\sigma Y+m}(t) = \mathrm{e}^{mt} M_Y(\sigma t) = \mathrm{e}^{mt+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

und

$$\phi_X(t) = e^{imt}\phi_Y(\sigma t) = \mathrm{e}^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und jeweils $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$-verteilt. Dann folgt

$$\phi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t) = \mathrm{e}^{inmt-\frac{n\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Also hat $X_1 + \ldots + X_n$ dieselbe charakteristische Funktion wie eine Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$. Kann man daraus auf die Verteilung von $X_1 + \ldots + X_n$ schließen? Ja, mittels Fourierinversionssatz, von dem wir eine Variante bald kennenlernen werden. Es gilt also $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{N}(nm, m\sigma^2)$.

(3) Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in [0,1]$ (Münzwürfe mit Erfolgsparameter p). Dann ist $Z = Y_1 + \ldots + Y_n$ binomialverteilt mit Parametern n und p. Also gilt

$$\phi_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{Y_i}(t) = (1 - p + p\mathrm{e}^{it})^n$$

und

$$M_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t) = (1 - p + p\mathrm{e}^{t})^n.$$

(4) Die Cauchyverteilung ist ein absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß $f \cdot \lambda$ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Hier ist die charakteristische Funktion nützlicher als die momentenerzeugende Funktion, denn ist X Cauchy-verteilt, so gilt $M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \infty$ für alle $t \neq 0$ (sogar $\mathbb{E}(|X|^n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Aber $\phi_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ ist wohldefiniert für alle $t \in \mathbb{R}$. Allerdings ist $t \mapsto \phi_X(t)$ nicht differenzierbar bei $t = 0$, also ist es insbesondere nicht analytisch. Dies steht im Gegensatz zu dem Fall, wo die momentenerzeugende Funktion endlich ist auf einer Umgebung der Null. Das heißt, Nichtdifferenzierbarkeit von ϕ ist eine „Spur" von der Divergenz der momentenerzeugenden Funktion.

4.1.5 Satz: *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit charakteristische Funktion ϕ. Dann gelten* *(i) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|\phi(t) - \phi(s)|^2 \leq 2(1 - \mathrm{Re}(\phi(t-s))).$$

(ii) $t \mapsto \phi(t)$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis: (i) Es gilt

$$|\phi(t) - \phi(s)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - \mathrm{e}^{isx}) \mu(\mathrm{dx}) \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{i(t-s)x} - 1) \mathrm{e}^{isx} d\mu \right|^2.$$

Cauchy-Schwarz anwenden

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{i(t-s)x} - 1 \right|^2 d\mu \right) \int_{\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{isx} \right|^2 d\mu = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \mathrm{e}^{i(t-s)x} - 1 \right|^2 d\mu \right).$$

nutze $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{i(t-s)x} - 1 \right) \left(\mathrm{e}^{-i(t-s)x} - 1 \right) d\mu.$$

ausmultiplizieren ergibt

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \mathrm{e}^{i(t-s)x} - \mathrm{e}^{-i(t-s)x} + 1 \right) d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \mathrm{Re} \left(\mathrm{e}^{i(t-s)x} \right) \right) d\mu$$

der ist Realteil linear und stetig

$$= 2 \left(1 - \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(t-s)x} d\mu \right) = 2 \left(1 - \mathrm{Re}(\phi(t-s)) \right).$$

(ii) Wir müssen zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $|s - t| < \delta$ gilt:

$$|\phi(t) - \phi(s)|^2 < \varepsilon^2.$$

Da μ ein endliches Maß ist, existiert ein $N < \infty$ mit $\mu((-\infty, -N] \cup [N, \infty)) < \frac{\varepsilon^2}{6}$. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion bei 0 existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in [-N, N]$ und $u \in [-\delta, \delta]$ gilt:

$$\left| 1 - \mathrm{e}^{iux} \right| < \frac{\varepsilon^2}{6}. \tag{4.1}$$

Hier ist es wesentlich, dass wir x aus einer beschränkten Menge und nicht aus ganz $\mathbb{R}$ wählen. Ansonsten bekämen wir die Schranke (4.1) nicht unabhängig in x. Nun gilt:

$$1 - \mathrm{Re}(\phi(u)) = 1 - \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iux} d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \mathrm{Re} \left(\mathrm{e}^{iux} \right) \right) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} \left| 1 - \mathrm{Re} \left(\mathrm{e}^{iux} \right) \right| d\mu.$$

wegen $\left|1 - \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{iux}\right)\right| \leq 2$ und (4.1)

$$\leq \int_{(-\infty,-N]\cup[N,\infty)} 2d\mu + \int_{-N}^{N} \frac{\varepsilon^2}{6} d\mu \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{6} + \frac{\varepsilon^2}{6}\mu(\mathbb{R})$$

da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{6} + \frac{\varepsilon^2}{6} = \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Somit erhalten wir

$$|\phi(t) - \phi(s)|^2 \leq 2(1 - \mathrm{Re}(\phi(t-s))) \leq \varepsilon^2.$$

□

Unter geeigneten Voraussetzungen lassen sich die Momente eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ bzw. einer Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ aus der momentenerzeugenden oder der charakteristischen Funktion berechnen. Dies zeigt folgender Satz.

4.1.6 Satz: *(i) Sei M endlich auf $(-\delta, \delta)$. Dann gilt :*

$$\forall\, t \in (-\delta, \delta): \quad M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$$

Insbesondere:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad M^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$$

(ii) Sei $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\phi_X \in C^n(\mathbb{R})$ und

$$\forall\, t \in \mathbb{R}: \quad \phi^{(n)}(t) = i^n \mathbb{E}(X^n \mathrm{e}^{itX}).$$

Beweis: (i) Es gilt

$$\mathrm{e}^{s|x|} \leq \max(e^{sx}, e^{-sx}) \leq e^{sx} + \mathrm{e}^{-sx}.$$

Also folgt aus der Voraussetzung für $s \in (-\delta, \delta)$:

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s|X|}) \leq \mathbb{E}(\mathrm{e}^{sX}) + \mathbb{E}(e^{-sX}) < \infty.$$

Damit gilt

$$M(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(tX)^n}{n!}\right).$$

mit Satz von Lebesgue

$$= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{(tX)^n}{n!}\right).$$

Wegen Linearität

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \mathbb{E}\left(\frac{(tX)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mathbb{E}(X^n)}{n!}.$$

Für den Satz von Lebesgue brauchen wir noch einen integrierbare Majorante. Für $|t| < s$ ist $e^{s|X|}$ eine integrierbare Majorante der Partialsummen $\sum_{n=0}^{m} \frac{(tX)^n}{n!}$, denn:

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \frac{(tX)^n}{n!}\right| \le \sum_{n=0}^{m} \frac{|tX|^n}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|tX|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|tX|} \le \mathrm{e}^{s|X|}.$$

(ii) Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n.

- Induktionsanfang: Sei $n = 0$. ϕ ist stetig (siehe oben). Außerdem gilt $\phi^{(0)}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX})$ nach Definition.
- Induktionsschritt: Behauptung gelte für n, für $n+1$ ist sie z.z. Sei $\mathbb{E}(|X|^{n+1}) < \infty$. Wegen $|X|^n \le |X|^{n+1}+1$ folgt dann $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$. Nach Induktionsannahme gilt $\phi \in C^n(\mathbb{R})$ und

$$\frac{1}{h}(\phi^{(n)}(t+h) - \phi^{(n)}(t)) = \frac{1}{h}\left(i^n \mathbb{E}\left(X^n \mathrm{e}^{i(t+h)X}\right) - i^n \mathbb{E}\left(X^n \mathrm{e}^{itX}\right)\right).$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes

$$= \frac{1}{h}\mathbb{E}\left((iX)^n \left(\mathrm{e}^{i(t+h)X} - \mathrm{e}^{itX}\right)\right).$$

Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$= \frac{1}{h}\mathbb{E}\Bigg((iX)^n \int_t^{t+h} iX\mathrm{e}^{isX}\,\mathrm{d}s\Bigg).$$

Satz über dominierte Konvergenz

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \mathbb{E}\left((iX)^n iX\mathrm{e}^{itX}\right).$$

Die Abbildung $s \mapsto f(s) = \mathrm{e}^{isX(\omega)}$ ist stetig. Daher gilt $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[h\to 0]{} f(t)$ punktweise. Es gilt $|(iX)^n \frac{1}{h}\int_t^{t+h} iX\mathrm{e}^{isX}\,\mathrm{d}s| \le |X|^{n+1}$ und somit ist $|X|^{n+1}$ eine h-uniforme, integrierbare Majorante. Somit können wir in der Tat den Satz von Lebesgue anwenden.

Also existiert die $(n+1)$-te Ableitung $\phi^{(n+1)}$. Sie ist auch stetig, denn $t \mapsto (iX(\omega))^{n+1}\mathrm{e}^{itX(\omega)}$ ist stetig für festes ω und es gilt

$$\left|(iX)^{n+1}\mathrm{e}^{itX}\right| \le |X|^{n+1}$$

und damit ist $|X|^{n+1}$ eine integrierbare Majorante. Also gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\mathbb{E}\left((iX)^{n+1}\mathrm{e}^{isX}\right) \xrightarrow[s\to t]{} \mathbb{E}\left((iX)^{n+1}\mathrm{e}^{itX}\right). \qquad \square$$

4.1.7 Beispiel: Sei $X:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mu=f\lambda$, wobei $f(x)=c\mathrm{e}^{-\sqrt{|x|}}$. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(|X|^n)=c\int |x|^n\mathrm{e}^{-\sqrt{|x|}}\,\mathrm{dx}<\infty.$$

Denn exponentieller Abfall dominiert polynomielles Wachstum. Somit ist ϕ beliebig oft differenzierbar, das heißt es gilt $\phi\in C^\infty$.

Aber es gilt

$$M(t)=c\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{tx}\mathrm{e}^{-\sqrt{|x|}}\,\mathrm{dx}=\infty$$

für $t\neq 0$. Denn

$$\begin{aligned} t>0 &\quad\Rightarrow\ \text{Divergenz für } x\to\infty\\ t<0 &\quad\Rightarrow\ \text{Divergenz für } x\to-\infty \end{aligned}$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted] □

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted].