

Musterlösung zu Blatt 13

Aufgabe 1

Wir benötigen für die Taylor-Entwicklung dritten Grades die ersten drei Ableitungen von $f(x) = e^x \sin(x)$:

$$f'(x) = e^x (\sin(x) + \cos(x)), \quad f''(x) = 2e^x \cos(x), \quad f'''(x) = 2e^x (\cos(x) - \sin(x)). \quad (2 \text{ Pkt.})$$

Damit sind

$$\text{a) } f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^4, \quad (1 \text{ Pkt.})$$

$$\text{b) } f(x) = -e^\pi(x - \pi) - e^\pi(x - \pi)^2 - \frac{e^\pi}{3}(x - \pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x - \pi)^4, \quad (1 \text{ Pkt.})$$

$$\text{c) } f(x) = e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x - \frac{\pi}{2})^4, \quad (2 \text{ Pkt.})$$

mit jeweils passendem $\xi \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Nach Beispiel (22.4) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x), \quad \text{wobei} \quad |R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}. \quad (1 \text{ Pkt.})$$

Für $x_0 = \frac{1}{10}$ und $n = 2$ erhalten wir daher

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1\,198\,001}{12\,000\,000} = 0.09983341\bar{6} =: a \quad (1 \text{ Pkt.})$$

mit absolutem Fehler

$$\left| \sin\left(\frac{1}{10}\right) - a \right| = \left| R_7\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^7}{7!} = \frac{1}{50\,400\,000\,000} \leq 10^{-10}, \quad (1 \text{ Pkt.})$$

d.h. a approximiert $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ auf mindestens 10 Dezimalstellen genau.

Aufgabe 3

a) Für $n \in \mathbb{N}$ nimmt die nicht-negative Funktion f_n ihr Maximum an der Stelle $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0, 1]$ an. Deshalb gilt (1 Pkt.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^n - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \right] = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0. \quad (2 \text{ Pkt.})$$

b) Für $x \in [0, 1)$ gilt

$$|f'_n(x)| \leq nx^{n-1} + (n+1)x^n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Für $x = 1$ gilt aber $f'_n(x) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert also punktweise gegen

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ -1, & x = 1. \end{cases} \quad (1 \text{ Pkt.})$$

Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, da die Funktionen f'_n jeweils stetig sind und sich die Stetigkeit nach *Satz 1, § 21* auf die Grenzfunktion g übertragen müsste. (1 Pkt.)

Aufgabe 4

Es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k^l} \right|}} = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \right)^l = 1 \quad \text{für } l \in \{0, 1, 2\}, \quad (2 \text{ Pkt.})$$

sodass die Potenzreihen f , g und h nach *Aufgabe 3 a) von Blatt 12* alle den gleichen Konvergenzradius $R = 1$ haben.

a) Falls $z \in K$, so ist die Folge z^k keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ daher nicht konvergent. (1 Pkt.)

b) Für $z = 1$ ist $g(z)$ die *harmonische Reihe* und daher divergent. Für $z = -1$ ist $g(z)$ die *alternierende harmonische Reihe* und daher konvergent. (1 Pkt.)

c) Für $z \in \overline{D_R}$ setzen wir $h_k(z) := \frac{z^k}{k^2}$ und rechnen nach, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_{\overline{D_R}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \quad (1 \text{ Pkt.})$$

sodass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$, nach dem Weierstraß'schen Konvergenzkriterium, auf $\overline{D_R}$ absolut und gleichmäßig konvergent ist. (1 Pkt.)

d) *(Diejenigen Studierenden, die an der Lösung zu dieser Teilaufgabe interessiert sind, wenden sich bitte per Mail an Florian Oschmann.)*