Musterlösung zum 3. Testat

Aufgabe 1

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit erster und zweiter Ableitung

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + (x^2 - 3)\mathrm{e}^{-x}(-1) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2 + 2x + 3)$$ **(1 Pkt.)**

und

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(-1)(-x^2 + 2x + 3) + \mathrm{e}^{-x}(-2x + 2) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x - 1).$$ **(1 Pkt.)**

Jedes lokale Extremum x von f erfüllt die notwendige Bedingung

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 3) = 0.$$

Damit sind die Kandidaten für lokale Extrema die Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Einsetzen in die zweite Ableitung liefert **(1 Pkt.)**

$$f''(x_1) = 4\mathrm{e} > 0 \quad \text{und} \quad f''(x_2) = -4\mathrm{e}^{-3} < 0.$$

Damit liegen an der Stelle $x_1 = -1$ ein lokales Minimum und an der Stelle $x_2 = 3$ ein lokales Maximum der Funktion f vor. **(1 Pkt.)**

Aufgabe 2

Zunächst setzen wir die Stelle $x_0 = 0$ in die Abschätzung aus der Aufgabenstellung ein und erhalten dadurch

$$|f(0)| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$ **(1 Pkt.)**

Division der selben Abschätzung durch $|x| \neq 0$ ergibt außerdem

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 4\right| \leq c|x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$ **(1 Pkt.)**

also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$. Daraus folgt sofort **(1 Pkt.)**

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 4.$$ **(1 Pkt.)**

Also ist f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 4$.

Aufgabe 3

(a) Wir substituieren zunächst $u := x^2$ und lösen dann mit partieller Integration:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u\sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(-u\cos(u)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(u)\,\mathrm{d}u\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-u\cos(u)\Big|_0^{\pi} + \sin(u)\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}. \qquad \textbf{(3 Pkt.)}$$

(b) Wir integrieren zwei mal partiell, um

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x\sin(x)\Big|_0^{\pi} - \left(-\mathrm{e}^x\cos(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \qquad \textbf{(2 Pkt.)}$$
$$= \mathrm{e}^x(\sin(x)+\cos(x))\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

zu erhalten. Umstellen der Gleichung liefert dann

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x)+\cos(x))\Big|_0^{\pi} = -\frac{e^{\pi}+1}{2}. \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

Aufgabe 4

Da f als differenzierbare Funktion erst recht stetig ist, impliziert der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*

$$f(\xi_1)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{für ein } \xi_1 \in [a,b]. \qquad \textbf{(0.5 Pkt.)}$$

Zusätzlich liefert der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* die Existenz einer Stelle $\xi_2 \in (a,b)$, so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi_2). \qquad \textbf{(0.5 Pkt.)}$$

Wir multiplizieren die beiden Gleichungen miteinander und erhalten dadurch

$$f(\xi_1)(b-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi_2)\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{(2 Pkt.)}$$

was, nach dem Kürzen des Ausdrucks $b-a$, gerade die gewünschte Gleichung ist.

Aufgabe 5

(1 Pkt. pro Teilaufgabe.)

(a) $f(x) := (x-1)^2$ ist auf $[1,4)$ streng monoton steigend mit $f'(1) = 0$.

(b) $f(x) := \sin(x)$ ist nicht-konstant, stetig und beschränkt und erfüllt zudem

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$$

(c) $f(x) := \sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar. Außerdem gilt

$$\lim_{x\searrow 0} f'(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$$

und

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} < \infty.$$