Musterlösung zum 2. Testat

Aufgabe 1

a) Sei n irgendeine ungerade natürliche Zahl. Wir wollen den Zwischenwertsatz auf die Funktion $f(x) := g(x) - x^n$ anwenden. $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst wieder stetig. Die Definition von g impliziert, dass **(1 Pkt.)**

$$f(-1) = g(-1) - (-1)^n = g(-1) + 1 \geq 0$$ **(0.5 Pkt.)**

und

$$f(1) = g(1) - 1^n = g(1) - 1 \leq 0.$$ **(0.5 Pkt.)**

Der Zwischenwertsatz liefert uns also die Existenz mindestens einer Stelle $x_0 \in [-1,1]$, sodass

$$f(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x_0) - x_0^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x_0) = x_0^n.$$ **(1 Pkt.)**

b) Sei n irgendeine gerade natürliche Zahl. Die Aussage gilt nicht für die stetige konstante Funktion

$$g\colon [-1,1] \to [-1,1], \quad g(x) := -1,$$ **(1 Pkt.)**

denn $x^n \geq 0 > g(x)$ für alle $x \in [-1,1]$. **(1 Pkt.)**

Aufgabe 2

Wir setzen $y := -\log(x)$ und beobachten, dass

$$\lim_{x\to 0} x\log(x) = \lim_{y\to\infty} -e^{-y}y = -\lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = 0,$$ **(1 Pkt.)**

wobei dieser Grenzwert aus der Vorlesung folgt. Setzen wir hingegen $z := -\frac{1}{2}\log(x)$, so erhalten wir analog, dass

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log(x) = \lim_{z\to\infty} -2e^{-z}z = -2\lim_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} = 0.$$ **(1 Pkt.)**

Insgesamt schließen wir

$$\lim_{x\to 0} \left(x + \sqrt{x}\right)\log(x) = \lim_{x\to 0} x\log(x) + \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log(x) = 0.$$ **(1 Pkt.)**

Aufgabe 3

Behauptung: $\inf(A) = 0$.
Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{2^n} \geq 0$, also ist 0 eine untere Schranke von A. Sei K nun irgendeine weitere untere Schranke von A. Wir betrachten die Folge $x_n := \frac{1}{2^n}$. Da K eine untere Schranke ist, gilt $A \ni x_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Grenzwertregeln liefern dann $0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq K$, sodass 0 die größte untere Schranke von A sein muss. **(1 Pkt.)** **(1 Pkt.)**

Behauptung: $\sup(A) = 1$.
Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $2^n \geq 1$ und daher $\frac{1}{2^n} \leq 1$, sodass 1 eine obere Schranke von A ist. Da außerdem $1 \in A$ gilt, ist 1 das Maximum und insbesondere das Supremum der Menge. **(1 Pkt.)** **(1 Pkt.)**

Aufgabe 4

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$. Daher folgt nach den üblichen Grenzwertrechenregeln

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(n+1)}{(1-n^2)9^n} = \left(\lim_{n\to\infty} -\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{n^2}}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^n}\right) = -2 \cdot 0 = 0. \qquad \textbf{(2 Pkt.)}$$

b) Wir wissen, dass $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Wieder folgt aus den Grenzwertrechenregeln, dass **(1 Pkt.)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9n^4+1}} \left(\sum_{k=0}^n k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2\sqrt{9n^4+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{6\sqrt{1+\frac{1}{9n^4}}} = \frac{1}{6}. \qquad \textbf{(2 Pkt.)}$$

Aufgabe 5

Wir setzen $a_n := (-1)^n \frac{n!}{2^{(n^2)}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und rechnen nach, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)! \cdot 2^{(n^2)}}{2^{(n^2+2n+1)} \cdot n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{4^n}. \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

Wir zeigen per Induktion, dass $\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{4^n} \leq \frac{1}{2} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n = 0$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{0+1}{4^0} = \frac{1}{2}$ ✓

IV: Es gelte $\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{4^n} \leq \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. **(1 Pkt.)**

IS: „$n \to n+1$“:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)+1}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{n+1}{4^n}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ folgt nun mit $n_0 = 0$ und $\theta = \frac{1}{2}$ aus dem Quotientenkriterium. **(1 Pkt.)**