# Musterlösung zum 1. Testat

Solltet ihr eine schönere Lösung zu einer der Aufgaben oder Fehler bzw. Unklarheiten finden, bitte per Mail Bescheid geben. Ich korrigiere es dann zeitnah. – Sebastian

## Aufgabe 1

IA: Wir betrachten $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 0 = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1. \quad \checkmark \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

IV: Die Aussage $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = n^2 + 2n + 1$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. **(0.5 Pkt.)**

IS: Wir schließen „$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2(n+1)+1) \\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1 + 2(n+1) + 1 \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1. \quad \checkmark \end{aligned} \qquad \textbf{(2.5 Pkt.)}$$

## Aufgabe 2

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist, impliziert die *notwendige Bedingung für die Konvergenz von Reihen*, dass $(a_k)_k$ eine Nullfolge sein muss. Für die Wahl $\varepsilon := 1$ liefert uns dies ein $K \in \mathbb{N}$, sodass **(1 Pkt.)**

$$|a_k| < 1 \quad \forall k \geq K. \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

Insbesondere gilt dann für die quadratischen Folgeglieder, dass

$$a_k^2 < |a_k| < 1 \quad \forall k \geq K. \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

Damit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ ab dem Index $K$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$. Wir schließen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=0}^{K-1} a_k^2 + \sum_{k=K}^{\infty} a_k^2 \leq \sum_{k=0}^{K-1} a_k^2 + \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \infty, \qquad \textbf{(1 Pkt.)}$$

da die beiden Summen aufgrund der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ endlich sein müssen. Damit ist also auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ absolut konvergent und ebenso $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k^2$.

## Aufgabe 3

Wir nutzen den *Wurzeltrick* und rechnen

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \sqrt{n^2+n}-n \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.\end{aligned}$$ **(2 Pkt.)**

Da der Ausdruck $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ nach den üblichen Grenzwertsätzen gegen 1 konvergiert, folgt also **(1 Pkt.)**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$ **(1 Pkt.)**

## Aufgabe 4

Wir zeigen, dass die Folge $(-(a_k+b_k))_k$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, d.h. dass wir für beliebiges $N\in\mathbb{R}$ ein $K\in\mathbb{N}$ finden, sodass

$$-(a_k+b_k) > N \quad \forall k\geq K.$$

Zunächst halten wir fest, dass die Konvergenz der Folge $(b_k)_k$ ihre Beschränktheit impliziert. Es existiert also eine Schranke $M\in\mathbb{R}$ mit $M\geq 0$, sodass

$$|b_k|\leq M \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$ **(1 Pkt.)**

Die bestimmte Divergenz von $(a_k)_k$ gegen $-\infty$ wiederum impliziert die bestimmte Divergenz von $(-a_k)_k$ gegen $+\infty$. Daher finden wir zu $N+M\in\mathbb{R}$ einen Index $K\in\mathbb{N}$ mit **(1 Pkt.)**

$$-a_k > N+M \quad \forall k\geq K.$$ **(1 Pkt.)**

Dies wiederum impliziert

$$-(a_k+b_k) = -a_k-b_k > -a_k-M > N+M-M = N \quad \forall k\geq K,$$ **(1 Pkt.)**

d.h. die bestimmte Divergenz von $(-(a_k+b_k))_k$ gegen $+\infty$. Nach Definition gilt dann $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k+b_k) = -\infty$. **(1 Pkt.)**

## Aufgabe 5

1) Wähle z.B.: $a_k := (-1)^k$. **(1 Pkt.)**

2) Wähle z.B.: $b_k := \begin{cases} 0, & n \text{ gerade,} \\ n, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$ **(1 Pkt.)**

3) Wähle z.B.: $c_k := \frac{(-1)^k}{k}$. **(1 Pkt.)**