Analysis I
Blatt 0

Aufgabe 1

zz: $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

$\forall n \geq 5 : 2^n > n^2$.

Beweis von a) per Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang(IA):n=1: $2^1 > 1$

Wir möchten, dass a) auch für n+1 gilt. Also $2^{n+1} > n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte a) für EIN $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt(IS): $2^{n+1} = 2 * 2^n \overset{IV}{>} 2 * n \geq n + 1$

$\square$

Beweis b) per Induktion über $n \in \mathbb{N}$

IA$n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

IV:Es gelte b) für ein $n \in \mathbb{N}$

IS:

$2^{n+1} = 2 * 2^n + \overset{IV}{>} 2 * n^2 = n^2 + n^2 = n^2 + n * n \overset{n \geq 5}{\geq} n^2 + 5n = n^2 + 2n + 3n \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\forall m \in \mathbb{N} : m$ ungerade $\implies m^2$ gerade

b) $\forall m \in \mathbb{N} : m^2$ ungerade $\implies m$ ungerade

c) Für beliebige Mengen A, B, C gilt: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

d) Für beliebige Mengen A, B, C gilt:$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

Beweis:

a) falsch. Betrachte m=1

b) Beweis via Kontraposition: ($p \implies q \Leftrightarrow \neg q \implies \neg p$)

Also m gerade $\implies m^2$ gerade.

m gerade $\implies \exists n \in \mathbb{N} : m = 2n$

$\implies m^2 = (2n)^2 = 2 * 2 * n^2 = 2(\tilde{n}), \quad \tilde{n} \in \mathbb{N} \implies m^2$ ist gerade

$\square$

c)

$$\begin{aligned}
&x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \vee (x \in B \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)
\end{aligned}$$

d= falsch, Betrachte $A = B = C = \{1\}$
Aufgabe 3:
$(\forall x \in M : A(x) \implies B(x)) \Leftrightarrow (\nexists x \in M : A(x) \wedge \neg B(x))$.
Beweis:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in M : A(x) \implies B(x) \\
&\Leftrightarrow \neg\neg(\forall x \in M : A(x) \implies B(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x \in M :\neq (A(x) \implies B(x))) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x \in M : \neg(\neg A(x) \vee B(x))) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x \in M : A(x) \wedge \neg B(x)) \\
&\Leftrightarrow \nexists x \in M : A(x) \wedge \neg B(x)
\end{aligned}$$