Zweite Klausur zur Analysis 2
24. September 2020

Aufgabe 1: (2+2+2+2+2+2=12 Punkte)

Alle nachfolgenden Aussagen sind falsch. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt differenzierbar.

(b) Jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar.

(c) Jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(0) = 0$ und positiv semidefiniter Hessematrix $\mathrm{Hess}_f(0)$ hat in 0 ein lokales Minimum.

(d) Jeder differenzierbare Weg $\gamma : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ hat eine wohldefinierte Länge $L(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.

(e) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $x_0 \in S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ sei ein globales Maximum von f auf S^1. Dann gilt $\nabla f(x_0) = 0$.

(f) Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 2: (4+4=8 Punkte)

Geben Sie (ohne Begründung) für die angegebenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^2$ jeweils

$$\overline{A}\,,\ \partial A\,,\ \mathring{A}$$

an. Geben Sie außerdem (mit einer kurzen Begründung) an, welche der drei Mengen für das jeweilige A kompakt sind.

(a) $A = [0, 1) \times \{0\}$

(b) $A = ([0, 1) \cap \mathbb{Q}) \times (0, 1)$

Aufgabe 3: (4+4=8 Punkte)

Auf $\mathbb{R}^2$ sind die *New-York-Metrik* d_1 und die *euklidische Metrik* d_2 wie folgt definiert:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}\,.$$

Zeigen Sie, dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$cd_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq Cd_2(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4: (5+5=10 Punkte)

Es sei $\Omega := [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $C(\Omega)$ der Raum der stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Für $f, g \in C(\Omega)$ betrachten wir zwei Abstandsbegriffe:

$$\mathrm{d}_{L^1}(f,g) := \int_0^1 \int_0^1 |f(x_1,x_2) - g(x_1,x_2)| \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,,$$
$$\mathrm{d}_{C^0}(f,g) := \sup_{x\in[0,1]^2} |f(x) - g(x)| \,.$$

Untersuchen Sie für $f_k, f \in C(\Omega)$, definiert durch $f_k(x) := x_1^k x_2$ und $f(x) = 0$ für alle x, ob $\mathrm{d}_{L^1}(f_k, f) \to 0$ und ob $\mathrm{d}_{C^0}(f_k, f) \to 0$.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \,, \quad f \in C(\Omega) \,,$$

auf $C(\Omega)$ eine Norm definiert wird.

Aufgabe 5: (6+6=12 Punkte)

(a) Berechnen Sie für

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1x_2 + \sin x_3 + (1-x_2)\cos x_4 \\ x_1 + x_2 + \cos x_3 + (1-x_1)\sin x_4 \end{pmatrix}$$

die Jakobimatrix $\mathrm{D}f(1,1,\pi,\pi)$. Nach welchen Koordinaten können Sie die Gleichung $f = 0$ mit dem Satz über implizite Funktionen lokal um den Punkt $(1,1,\pi,\pi)$ herum auflösen? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

(b) Berechnen Sie für

$$g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^3 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix} .$$

die Jakobimatrix $\mathrm{D}g(0)$. Kann man lokal um $x = 0$ den Satz über die Umkehrabbildung anwenden? Kann man lokal um $x = 0$ die Abbildung g invertieren?

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Berechnen Sie für

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + x_1^2)\sin x_2$$

die Taylorreihe um 0 bis zu Termen dritter Ordnung (d. h. inklusive kubischer Terme in x).

Aufgabe 7: (4+4+4=12 Punkte)

Bestimmen sie alle lokalen Minima und lokalen Maxima der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = (\sin x_1)(\sin x_2)$.

(b) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (\log x_1)(\cos x_2)$.

(c) $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ für die Ellipse

$$E = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1^2 + 5x_2^2 = 8\}.$$

Aufgabe 8: (4+4=8 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichungen

(a) $y' = y^2 x$, $y(0) = 2$.

(b) $y' = y + 3e^x$, $y(0) = 2$.

Aufgabe 9: (4+3+3=10 Punkte)

(a) Formulieren sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Geben Sie eine zu $y' = f(y)$ und $y(0) = c$ äquivalente Integralgleichung an.

(c) Geben Sie die Fixpunktiteration aus dem Beweis von Picard-Lindelöf an.

Aufgabe 10: (6+6=12 Punkte)

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

(b) Finden Sie die Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$