Erste Klausur zur Analysis 2
28. Juli 2020

Aufgabe 1: (8×0,5+4×2=4+8=12 Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (ohne Begründung)

(i) Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ kann stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden.

(ii) Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ kann stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden.

(iii) Jede Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die auf $(0, 1)$ differenzierbar ist, nimmt auf $[0, 1]$ ihr Maximum an.

(iv) Für jede total differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(tv)$ differenzierbar.

(v) Für jede partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(tv)$ differenzierbar.

(vi) Für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: Für jedes $x_2 \in \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t, x_2)$ ihr Maximum an.

(vii) Für jede stetige Funktion $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: Für jedes $x_1 \in [0, 1]$ nimmt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(x_1, t)$ ihr Maximum an.

(viii) Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum an.

(b) Geben Sie zu vier der Aussagen aus (a) ein Gegenbeispiel f an (ohne Beweis).

Aufgabe 2: (5+5=10 Punkte)

Geben Sie (ohne Begründung) für die angegebenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ jeweils

$$\overline{A}\,,\ \partial A\,,\ \mathring{A}\,,\ A\,,\ \overline{A} \setminus A$$

an. Geben Sie außerdem (mit einer kurzen Begründung) an, welche der fünf Mengen für das jeweilige A kompakt sind.

(a) $A = [0, 1] \times [0, 2)$

(b) $A = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times [0, 2]$

Aufgabe 3: (4+5=9 Punkte)

Sei $A = [0, 1]^2$ und $C^0(A; \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen auf A mit der Norm

$$\|f\|_{C^0(A)} = \sup_{x \in A} |f(x)|\,.$$

(a) Wir betrachten die Funktionen $f(x) = x_1 x_2$ und $g(x) = (1 - x_1)(1 - x_2)$ auf A. Berechnen Sie $\|f - g\|_{C^0(A)}$.

(b) Für $f \in C^0(A;\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}$ sei f_k definiert durch $f_k(x) := \frac{1}{k} f(x)$ für $x \in A$. Zeigen Sie, dass $(f_k)_k$ eine Cauchy-Folge in $C^0(A;\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4: (6+6=12 Punkte)

(a) Berechnen Sie für

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (x_1 + 1)\log(x_2 + 1) \\ x_3 \cos x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

die Jakobimatrix $\mathrm{D}f(0)$. Nach welchen Koordinaten können Sie die Gleichung $f = 0$ mit dem Satz über implizite Funktionen lokal um die 0 auflösen? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

(b) Berechnen Sie für

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (1 + x_2)x_1 + x_3 + x_3^3 \\ x_2 \\ (1 + x_2)x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

die Jakobimatrix $\mathrm{D}g(0)$. Kann man lokal um $x = 0$ den Satz über die Umkehrabbildung anwenden? Kann man lokal um $x = 0$ die Abbildung g invertieren?

Aufgabe 5: (6+2+2=10 Punkte)

(a) Berechnen Sie für

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1)\log(x_2 + 1)\cos(x_3)$$

die Taylorreihe um 0 bis zu Termen zweiter Ordnung (d. h. inklusive quadratischen Termen in x).

(b) Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos s \\ e^t \sin s \\ t \end{pmatrix}$$

eine Immersion ist (die Jakobimatrix von ϕ also überall maximalen Rang hat). Ist $\phi(\mathbb{R}^2) =: U$ eine Untermannigfaltigkeit? (ohne Beweis)

(c) Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (s,t) \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos s \\ e^t \sin(2s) \\ t \end{pmatrix}$$

eine Immersion ist. Ist $\psi(\mathbb{R}^2) =: V$ eine Untermannigfaltigkeit? (ohne Beweis)

Aufgabe 6: (3+2+2+3=10 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x,y) \mapsto f(x,y)$. Formulieren Sie die Bedingung für: f ist Lipschitz-stetig in y (so wie im Satz von Picard-Lindelöf gefordert).

(b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die differenzierbar ist, aber nicht global Lipschitz-stetig.

(c) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die global Lipschitz-stetig ist, aber nicht differenzierbar.

(d) Beweisen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 7: (5+3+3=11 Punkte)

(a) Formulieren sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Geben Sie eine zu $y' = f(y)$ und $y(0) = c$ äquivalente Integralgleichung an.

(c) Geben Sie die Fixpunktiteration aus dem Beweis von Picard-Lindelöf an.

Aufgabe 8: (7 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = e^y \sin x\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 9: (6+6=12 Punkte)

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

(b) Finden Sie die Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10: (4+3=7 Punkte)

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' = -\omega^2 y - 2\mu y'$$

an. Bedenken Sie dabei alle Fälle $\omega > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die Lösung von

$$y'' = -\omega^2 y + \sin x\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

für $\omega \neq 1$ an.