Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 12

Abgabe bis Donnerstag, 16. Juli 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Periodendauer des math. Pendels). *(1+2+2+2+2+2=11 Punkte)*

Wir betrachten die Gleichung $y'' = -\sin y$ für das mathematische Pendel. Es sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit $y'(0) = 0$ und $y(0) = y_0 \in (0, \pi)$.

(a) Geben Sie Formeln für die potentielle Energie $U(y)$ und die Gesamtenergie E des Systems an.

(b) Zeigen Sie, dass $y(x) \in [-y_0, y_0]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Wir definieren $T \coloneqq \inf\{x > 0 \;:\; y(x) = -y_0\} \in [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass $y'(x) < 0$ für $x \in (0, T)$. Folgern Sie daraus, dass $\lim_{x \to T} y(x) = -y_0$.

(d) Zeigen Sie, dass y auf $(0, T)$ der Differentialgleichung

$$y' = -\sqrt{2(E - U(y))}$$

genügt, und folgern Sie, dass

$$T = \int_{-y_0}^{y_0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2(E - U(y))}} \in \mathbb{R}\,.$$

(e) Formen Sie den Ausdruck aus (d) unter Benutzung der Formel $\cos y = 1 - 2\sin^2(y/2)$ und der Substitution $s = \arcsin\left(\sin(y/2)/\sin(y_0/2)\right)$ um zu

$$T = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1 - \sin^2(y_0/2)\sin^2(s)}}\,.$$

(f) Linearisieren Sie die Gleichung um $y = 0$. Wie ist die Periodendauer für die linearisierte Gleichung? Wie verhält Sie sich im Vergleich zur Periodendauer der Originalgleichung?

Aufgabe 2 (Quadratisches Potential). *(3+2=5 Punkte)*

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung

$$y'' = -Ay\,, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung an. Überzeugen Sie sich, dass die Lösungen im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ (möglicherweise entartete) Ellipsen durchlaufen.

(b) Unter welcher Voraussetzung an λ_1 und λ_2 ergeben sich nichtperiodische Lösungen? Wie bestimmt sich andernfalls die Periodendauer?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0\,, \qquad y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

mithilfe des Ansatzes $z = \sqrt{x}y$.