

## Analysis 2

### Blatt 8

Abgabe bis Dienstag, 16. Juni 2020, 14:00 Uhr

---

**Aufgabe 1 (Die orthogonalen Matrizen als Untermannigfaltigkeit).** (5 Punkte)

Die Menge  $\mathbb{R}^{n \times n}$  aller reellen  $n \times n$ -Matrizen  $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$  werde mit dem  $\mathbb{R}^{n^2}$  mit Koordinaten  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$  identifiziert. Zeigen Sie: Die Menge

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = I\}$$

der orthogonalen  $n \times n$ -Matrizen ist eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  der Dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Ist  $O(n)$  zusammenhängend?

**Aufgabe 2 (Minimierung unter Nebenbedingungen).** (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $(1, -1, 0)$  vom Rotationshyperboloid

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$

d. h.  $\inf_{(x,y,z) \in H} d((x, y, z), (1, -1, 0))$ .

**Aufgabe 3 (Parameterabhängige Integrale).** (2+2+2=6 Punkte)

(a) Es sei  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist die Funktion  $F(x) := \int_0^1 f(x, y) dy$  stetig auf  $[0, 1]$ ? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz über die stetige Abhängigkeit vom Parameter des Integrals?

(b) Es sei  $f : (-1, 1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}, & \text{falls } y > 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion  $F(x) := \int_0^1 f(x, y) dy$  differenzierbar in  $x = 0$ ? Ist die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation?

(c) Es sei  $f : (0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) := \frac{x - y}{(x + y)^3}.$$

Stimmen die (uneigentlichen) Integrale

$$C_1 := \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \quad \text{und} \quad C_2 := \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

überein? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz über Doppelintegrale?

**Aufgabe 4 (Berechnung eines Integrals).**

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Betrachten Sie dazu das Integral  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$  für  $t \in \mathbb{R}$  und verwenden Sie, dass die Funktion  $F(t) = \arctan(t)$  eine Stammfunktion von  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  ist.