Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 6

Abgabe bis Dienstag, 2. Juni 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Lokale Extrema). *(2+3=5 Punkte)*

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) := (x^2 + 2y^2)\exp(-x^2 - y^2)$,

(b) $g : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad g(x, y) := y(1 - x)\exp(-x^2 - y^2)$.

Aufgabe 2 (Taylor-Formel). *(5 Punkte)*

Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x, y, \phi) := \frac{x\cos(\phi) + y\sin(\phi)}{x^2 + y^2}$$

bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung um den Punkt $(1, 1, \pi)$.

Aufgabe 3 (Abschreckendes Beispiel). *(5 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$. Zeigen Sie, dass f auf allen Geraden durch $(0, 0)$ ein Minimum in $(0, 0)$ besitzt, aber $(0, 0)$ kein lokales Minimum von f ist.

Aufgabe 4 (Methode der kleinsten Quadrate). *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie zu n vrogegebenen Punkten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ diejenige Gerade $y = ax + b$, für die die Summe

$$f(a, b) := \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

minimal wird.