Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 5

Abgabe bis Montag, 25. Mai 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Differenzierbarkeit). *(5 Punkte)*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f (total) differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2 (Konstante Funktionen). *(3+4=7 Punkte)*

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Weiter sei $f : B_r(x) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(y) = 0$ für alle $y \in B_r(x)$. Zeigen Sie, dass f auf $B_r(x)$ konstant ist.

(b) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und zusammenhängende Menge. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(y) = 0$ für alle $y \in U$. Zeigen Sie, dass f auf U konstant ist.

Erinnerung: U heißt *zusammenhängend*, wenn die einzigen Teilmengen $V \subset U$, die in U sowohl offen als auch abgeschlossen sind, die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge U sind.

Tipp: Definieren Sie für (b) eine geeignete Menge $V \subset U$, für die Sie dann mithilfe von (a) zeigen, dass $V = U$.

Aufgabe 3 (Beispiele zur Differenzierbarkeit). *(2+2+2+2=8 Punkte)*

Sei $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie jeweils eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der angegebenen Eigenschaft an.

(a) f ist in x_0 stetig und partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar.

(b) f ist in x_0 nicht stetig, aber in x_0 existieren alle Richtungsableitungen.

(c) f ist überall zweimal partiell differenzierbar, aber es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0)$.

(d) f ist in x_0 partiell differenzierbar und es existieren sogar alle Richtungsableitungen in x_0, aber es gibt einen Einheitsvektor $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{D}_\nu f(x_0) \neq \langle \nu, \operatorname{grad} f(x_0)\rangle$

Versuchen Sie zunächst, selbst entsprechende Beispiele zu finden. Wenn Sie ein Beispiel gefunden haben, versuchen Sie, es weiter zu vereinfachen. Wenn Sie nicht weiterkommen, dürfen Sie auch im Internet oder in Lehrbüchern recherchieren.