Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 3

Abgabe bis Montag, 11. Mai 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Distanz-Funktion). *(2+2=4 Punkte)*

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\partial A = \{x \in X : \ \operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, X \setminus A) = 0\}$.

(b) $\overline{A} = \{x \in X : \ \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

Hierbei ist $\operatorname{dist}(x, A) \coloneqq \inf\{d(x, y) : \ y \in A\}$ für $x \in X$.

Aufgabe 2 (Kompaktheit). *(3+3=6 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines topologischen Raumes wieder kompakt ist. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass dies bei abzählbaren Vereinigungen i. A. nicht der Fall ist.

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum mit der trivialden Metrik

$$d(x, y) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{für } x = y\,, \\ 1 & \text{für } x \neq y\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist.

Aufgabe 3 (Stetigkeit der Umkehrabbildung). *(3+2=5 Punkte)*

(a) Seien X, Y Hausdorff-Räume, wobei X kompakt ist. Sei $f : X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Zeigen Sie: Die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ist stetig, d. h. f ist ein Homöomorphismus.

(b) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass die Aussage in a) falsch ist, wenn man nicht fordert, dass X kompakt ist.

Aufgabe 4 (Kompaktheit und Vollständigkeit). *(5 Punkte)*

Zeigen Sie: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.