Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 2

Abgabe bis Montag, 4. Mai 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Vollständigkeit abgeschlossener Teilräume). *(4 Punkte)*

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass Y mit der induzierten Metrik genau dann vollständig ist, wenn Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 2 (Charakterisierung von Stetigkeit). *(2+4+2=8 Punkte)*

Seien X, Y topologische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $V \subset Y$ auch $f^{-1}(V) \subset X$ abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie: f is genau dann stetig, wenn für jede Teilmenge $U \subset X$ die Inklusion $f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)}$ gilt.

(c) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass auch für ein stetiges f im Allgemeinen nicht $f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$ gilt.

Aufgabe 3 (Vollständigkeit eines Funktionenraums). *(4 Punkte)*

Es sei $\mathcal{C}[a, b]$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [a, b]\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}[a, b]$ vollständig ist.

Tipp: Verwenden Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und die Tatsache, dass gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen wieder stetig sind.

Aufgabe 4 (Zusammenhang). *(2+2=2 Punkte)*

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn die einzigen Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, der ganze Raum X und die leere Menge $\emptyset$ sind.

(a) Geben Sie eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ an, die als topologischer Raum mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie nicht zusammehängend ist. Geben sie alle Teilmengen von A and, die (in A) sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

(b) Sei $f : X \to Y$ eine stetige und surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: Wenn X zusammenhängend ist, dann ist auch Y zusammenhängend.