Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

# Analysis 2
## Blatt 1

Abgabe bis Montag, 27. April 2020, 14:00 Uhr

---

**Aufgabe 1 (Metrische Räume).** *(3+3=6 Punkte)*

(a) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\delta : X \times X \to \mathbb{R}\,, \qquad \delta(x, y) := \min(d(x, y), 1)$$

eine Metrik auf $X$ ist und dass die Metriken $d$ und $\delta$ dieselben offenen Mengen auf $X$ definieren.

(b) Sei $X$ eine beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x = y\,, \\ 1\,, & \text{falls } x \neq y\,, \end{cases}$$

wird die triviale Metrik auf $X$ definiert. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von $X$ bzgl. dieser Metrik zugleich offen und abgeschlossen ist.

**Aufgabe 2 (Metrik der französischen Eisenbahn).** *(3+2=5 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass im Raum $\mathbb{R}^n$ durch

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y|\,, & \text{falls ein } \alpha > 0 \text{ existiert mit } x = \alpha y\,, \\ |x| + |y|\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik definiert wird. Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.

(b) Gib es eine Norm $\|\cdot\|$, so dass $d(x, y) = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$?

**Aufgabe 3 (Inneres, Abschluss und Rand).** *(3+3=6 Punkte)*

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Das Innere von $A$ ist

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \,:\, U \subset A \text{ und } U \text{ offen}\}\,.$$

Außerdem ist $A$ genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$.

(b) Die abgeschlossene Hülle von $A$ (kurz: der Abschluss von $A$) ist

$$\overline{A} = \bigcap \{U \,:\, U \supset A \text{ und } U \text{ abgeschlossen}\}\,.$$

Außerdem ist $A$ genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$.

**Aufgabe 4 (Das Trennungsaxiom $T_1$).** *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein $T_1$-Raum, wenn für jedes $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen ist.

Geben Sie ein Beispiel für einen topologischen Raum an, der das Trennungsaxiom $T_1$ *nicht* erfüllt.

*Erinnerung:* Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt per Definition genau dann das Trennungsaxiom $T_1$ (ist also ein $T_1$-Raum), wenn zu je zwei Punkten $x \neq y$ in $X$ eine Umgebung $U$ von $x$ existiert mit $y \notin U$.