

Analysis I, Klausur 1
6. Februar 2020

Aufgabe 1.

(4+4=8 Punkte)

Beweisen Sie:

- (a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- (b) Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $x_n y_n \rightarrow xy$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2.

(5+2+2=9 Punkte)

Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ monoton wachsend und stetig. Für ein vorgegebenes $x_0 \in [a, b]$ sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- (a) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton. (*Hinweis*: Fallunterscheidung)
- (b) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $x \in [a, b]$.
- (c) Es gilt $f(x) = x$.

Aufgabe 3.

(4+(3+3+3)=13 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie für $q > 0$ die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k := \frac{q^k - k}{q^k + k}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.
- (b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \log n}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \frac{\sin n}{n}}{n} (-1)^n \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)!3^n}{(2n)!}$$

Aufgabe 4.

(3+3+3=9 Punkte)

Geben Sie jeweils (ohne Beweis) ein Beispiel an für

- (a) eine surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$.
- (b) eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ohne Maximum.
- (c) eine unbeschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Maximum.

Aufgabe 5.

(10 Punkte)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren $m := \min_{x \in [a, b]} f(x)$ und $M := \max_{x \in [a, b]} f(x)$.
Zeigen Sie: $f([a, b]) = [m, M]$.

Aufgabe 6.

(10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} \log(1/x).$$

Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und bestimmen Sie $\sup_{x \in (0, \infty)} f(x)$ und $\inf_{x \in (0, \infty)} f(x)$.

Aufgabe 7.

(5+5=10 Punkte)

- (a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Mittelwertsatz I).
- (b) Beweisen Sie $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$ für $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Aufgabe 8.

(10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(a) < 0, \quad f'(b) > 0, \quad a < b.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Warnung: Sie dürfen nicht annehmen, dass f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 9.

(3+3+3=9 Punkte)

- (a) Welches Integral hat den größeren Wert: $\int_0^{\pi/2} \sin^{10}(x) \, dx$ oder $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \, dx$?
- (b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T_0^f(x)$ der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x - 20)^2 - 20x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- (c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Seien außerdem $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s) \, ds = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Aufgabe 10.

(4+4+4=12 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \sin \sqrt{x}$ ($x > 0$).
Tipp: Substitution und partielle Integration.

- (b) Berechnen Sie das Integral $A := \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$.
Tipp: Zweifache partielle Integration liefert eine Gleichung für A .

- (c) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha} \, dx \quad (\alpha > 1)$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. seinen Wert.