

Testat (3) Version (A)

Name:	Vorname:					
Übungsgruppe:	Matrikelnr.:					

Lösung zu Aufgabe 1:

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in (a, b) : \Leftrightarrow$

$$\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (a, b) \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c$$

Lösung zu Aufgabe 2:

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $f'(x) = 0 \quad \forall x$

Beh: $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = c \quad \forall x$

Bew: Sonst $\exists x, x' \in (a, b) : f(x) \neq f(x'), x < x'$

MWST
 $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x') : f'(\xi) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \neq 0 \quad \Leftarrow$

Lösung zu Aufgabe 3:

Ang. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f(x) - 2x| \leq c|x|^2 \quad \forall x$

Beh: f diffbar in 0.

Bew: $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 2 \right| = \left| \frac{f(x) - 2x}{x} \right|$

$$\leq c|x| \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \rightarrow 2 \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Lösung zu Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right)' &= \left(\log(1+x) - \log(1-x) \right)' \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } T_0 f(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \\ &= \underbrace{f(0)}_{=0} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(\underbrace{(-1)^{n-1} (n-1)! + (n-1)!}_{\substack{= 2(n-1)!, \text{ } n \text{ ungerade} \\ = 0, \text{ } n \text{ gerade}}} \right) x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5:

$$f(x) = (x^2 + 2x) e^{-x}, \quad f'(x) = (-x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} + 2) e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$f''(x) = (x^2 - 2x - 2) e^{-x}$$

$$f''(\pm\sqrt{2}) = (\cancel{2} \mp 2\sqrt{2} - \cancel{2}) e^{\mp\sqrt{2}}$$

$$f''(\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \text{lok Max bei } \sqrt{2}, \quad f(\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2}) e^{-\sqrt{2}}$$

$$f''(-\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow \text{lok Min bei } -\sqrt{2}, \quad f(-\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2}) e^{\sqrt{2}}$$

Lösung zu Aufgabe 6:

$$\text{a) } f(x) = (x-1)^3$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 3, & x \in \{2, 4\} \\ x, & \text{sonst} \end{cases}$$