Testat 3, Version A (Matr.-Nr. endet auf Ziffer < 5)

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*
Wann heißt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $x_0 \in (a, b)$?

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz I:

$$f'(x) = 0 \;\forall x \in (a, b) \implies \exists c \in \mathbb{R}\,;\; f(x) = c \;\forall x \in (a, b).$$

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und für ein $c > 0$ gelte $|f(x) - 2x| \leq c|x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4. *(3+3=6 Punkte)*
Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f : x \mapsto \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(a) Berechnen sie die erste Ableitung von f.
(b) Geben Sie die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ an. Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 5. *(5 Punkte)*
Bestimmen sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.

Aufgabe 6. *(2+2+2=6 Punkte)*
Geben Sie (ohne Beweis) jeweils ein Beispiel an für:

(a) Eine streng monotone Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (0, 2)$.
(b) Eine stetige Funktion $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, die auf $(1, 3)$ differenzierbar ist mit $f'(x) \to \infty$ für $x \searrow 1$.
(c) Eine Funktion $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ ohne Maximum und ohne Minimum.

Testat 3, Version B (Matr.-Nr. endet auf Ziffer ≥ 5)

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*

Wann heißt eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $x_0 \in (a, b)$?

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz I:

$$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b) \implies f \text{ ist monoton wachsend.}$$

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und für ein $c > 0$ gelte $|f(x) + 3x| \leq c|x|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4. *(3+3=6 Punkte)*

Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ die Funktion $f : x \mapsto \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

(a) Berechnen sie die erste Ableitung von f.

(b) Geben Sie die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ an. Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1-x)^{-n} + (n-1)!(1+x)^{-n}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 5. *(5 Punkte)*

Bestimmen sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$.

Aufgabe 6. *(2+2+2=6 Punkte)*

Geben Sie (ohne Beweis) jeweils ein Beispiel an für:

(a) Eine streng monotone Funktion $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (1, 3)$.

(b) Eine stetige Funktion $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$, die auf $(2, 4)$ differenzierbar ist mit $f'(x) \to \infty$ für $x \searrow 2$.

(c) Eine Funktion $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$ ohne Maximum und ohne Minimum.