

Analysis I

Blatt 11

Abgabe bis Montag, 13. Januar 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Lokale und globale Maxima). (3+1=4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x}$.

- (i) Zeigen Sie, dass f_n genau ein lokales Maximum besitzt und dieses an der Stelle $x_0 = n$ liegt.
- (ii) Ist dieses lokale Maximum ein globales Maximum?

Aufgabe 2 (Ableitungen). (4 Punkte)

Sei $a > 0$ eine Konstante. Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung:

- (i) $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(\log x)$
- (ii) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{(x^x)}$
- (iii) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^{(x^x)}$
- (iv) $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^{\sqrt{\log x}}$

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit). (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

- (i) $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$
- (ii) $h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$

Aufgabe 4 (Rechenregel für höhere Ableitungen). (3+2=5 Punkte)

- (i) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei n -mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Ableitungsregel

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

wobei mit $f^{(m)} := \frac{d^m}{dx^m} f$ die m -te Ableitung von f bezeichnet wird.

- (ii) Berechnen Sie die hundertste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \cos(2x)$ in $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (Charakterisierung konvexer Funktionen). (3 Punkte)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$. Zeigen Sie: Falls f konvex ist, so gilt die Ungleichung

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Funktion $g(t) := f(tx + (1 - t)x_0)$ für $t \in [0, 1]$.