

Analysis I

Blatt 10

Abgabe bis Montag, 6. Januar 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Ableitung von Produkten). (4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) f ist differenzierbar in a und $f(a) = 0$,
- (ii) g ist stetig in a .

Zeigen Sie, dass das Produkt $f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar ist mit $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a)$.

Aufgabe 2 (Ableitung gerader und ungerader Funktionen). (2 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

Die Ableitung einer differenzierbaren geraden Funktion ist ungerade.

Aufgabe 3 (Die Ableitung der Wurzelfunktion). (2 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung der abstrakten Sätze aus der Vorlesung:

$$\frac{d}{dy}(y^2) = 2y \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 4 (Ableitungen). (2+2+2+2=8 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine positive Konstante ist:

- (i) $f : x \mapsto x^x$
- (ii) $f : x \mapsto \log(x\sqrt{x})$
- (iii) $f : x \mapsto (x^x)^x$
- (iv) $f : x \mapsto x^{(a^x)}$

Aufgabe 5 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit). (2+2=4 Punkte)

Seien $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \cdot g(x) = x$ für alle $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie:

- (i) Sind f und g differenzierbar, so gilt: $f(0) = 0 \implies g(0) \neq 0$.
- (ii) Ohne die Differenzierbarkeitsvoraussetzung ist der Schluss in (i) falsch.